

(1)

$\triangle BCP$ について、余弦定理より、

$$BP^2 = BC^2 + CP^2 - 2 \cdot BC \cdot CP \cos \angle C$$

$$\Leftrightarrow BP^2 = 4 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore BP = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$$

である。同様にして、 $\triangle APQ$ について、余弦定理より、

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cos \angle A$$

$$\Leftrightarrow PQ^2 = (2-t)^2 + t^2 - 2 \cdot (2-t) \cdot t \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3t^2 - 6t + 4}$$

となる。また、 $BP = QB$ である。

$$(\text{答}) \quad BP = QB = \sqrt{t^2 - 2t + 4}, \quad PQ = \sqrt{3t^2 - 6t + 4}$$

(2)

(1)より、

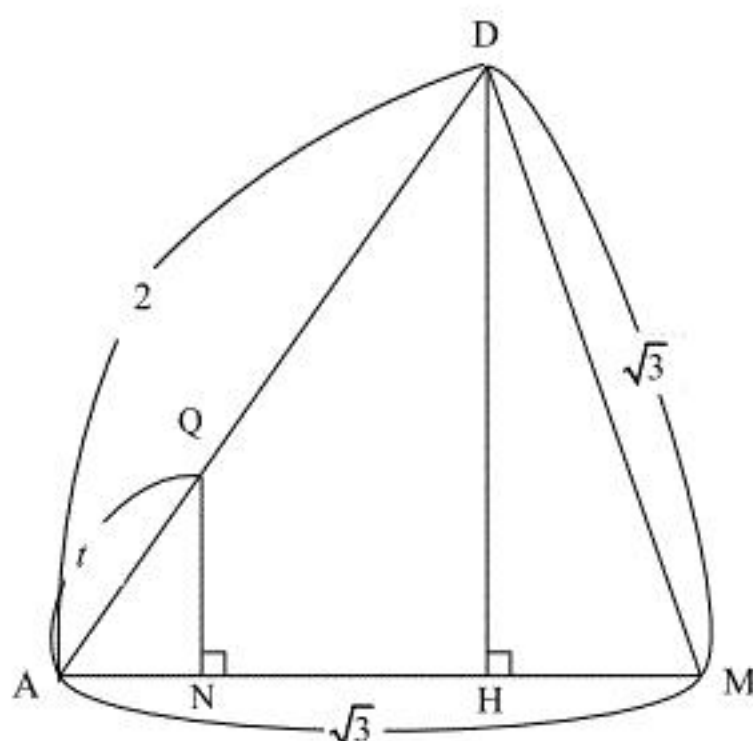
$$\begin{aligned} BP + PQ + QB &= 2\sqrt{t^2 - 2t + 4} + \sqrt{3t^2 - 6t + 4} \\ &= 2\sqrt{(t-1)^2 + 3} + \sqrt{3(t-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $t=1$ のとき、最小値 $2\sqrt{3}+1$ をとる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{3}+1$$

(3)

辺 BC の中点を点 M とおく。 $\triangle AMD$ は下図のような位置関係となる。



点 D から ABC に下した垂線の足を H とおくと、点 H は三角形 ABC の重心だから、

$AH:HM=2:1$ より、上図から

$$AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であり、三平方の定理より、

$$DH^2 = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

となる。よって、 $\triangle AQN \sim \triangle ADH$ より

$$QN : \frac{2\sqrt{6}}{3} = t : 2$$

$$\therefore QN = \frac{\sqrt{6}}{3}t$$

である。ここで、 $\triangle ABP$ の面積は

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-t) \cdot \sin \angle A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (2-t)$$

である。以上より、三角錐 $ABPQ$ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (2-t) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} t = \frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t)$$

(4)

(3)より、三角錐 $ABPQ$ の体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t) = -\frac{\sqrt{2}}{6} (t-1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

と変形できるから、 $t=1$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(1)

$f(1)=0$ となればよいから、

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a - 2b + 3c &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{3}{2}(a+c) \end{aligned}$$

となる。 a, b, c は 1 から 6 の整数より、

$$\begin{aligned} b &\leq 6 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a+c) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow a+c &\leq 4 \end{aligned}$$

であり、 $a+c$ は 4 以下の偶数である。よって、以上を満たす a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (1, 3, 1), (1, 6, 3), (2, 6, 2), (3, 6, 1)$$

の 4 通りである。 a, b, c の組は全部で 216 通りあるから、求める確率は

$$\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

となる。

(答) $\frac{1}{54}$

(2)

$f(x)$ の判別式 D について

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 9ac &> 0 \\ \Leftrightarrow b &> 3\sqrt{ac} \end{aligned}$$

となればよい。よって、

$$\begin{aligned} 3\sqrt{ac} < b &\leq 6 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{ac} &< 6 \\ \Leftrightarrow ac &< 4 \end{aligned}$$

である。よって、以上を満たす a, b, c の組は

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (1, 4, 1), (1, 5, 1), (1, 6, 1), (1, 5, 2), \\ &\quad (1, 6, 2), (1, 6, 3), (2, 5, 1), (2, 6, 1), (3, 6, 1) \end{aligned}$$

の 9 通りであり、求める確率は

$$\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

となる。

(答) $\frac{1}{24}$

(3)

$f(x)=0$ を満たす 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。このとき求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -f(x) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} 3a(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -3a \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta) dx \\ &= -3a \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha) \right\} dx \\ &= -3a \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} + (\alpha-\beta) \frac{(x-\alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -3a \cdot \frac{-(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= \frac{a}{2} \cdot (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2b}{3a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

であり、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4b^2}{9a^2} - \frac{4c}{a} \\ &= \frac{4(b^2-9ac)}{9a^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{b^2-9ac}}{3a}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{2} \cdot (\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{b^2-9ac}}{3a} \right)^3 \\ &= \frac{4}{27a^2} \left(\sqrt{b^2-9ac} \right)^3 \end{aligned}$$

となり、 a, c が最小かつ b が最大である $(a, b, c) = (1, 6, 1)$ のとき S は最大となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{27} \cdot \left(\sqrt{36-9} \right)^3 \\ &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $12\sqrt{3}$

(1)

二項定理を用いて、

$$\begin{aligned}
 2014^{10} &= 2^{10} \times 1007^{10} \\
 &= 1024 \cdot (10^3 + 7)^{10} \\
 &= 1024 \cdot \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \cdot 10^{3(10-k)} \cdot 7^k \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $k=9$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_9 \cdot 10^3 \cdot 7^9$$

であり、少なくとも千の位までは数字は0である。よって、十の位の数字を考えるには、 $k=10$ のときのみを考えればよい。 $k=10$ のとき①は、

$$1024 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 10^0 \cdot 7^{10} = 1024 \cdot 7^{10}$$

である。下二桁のみ計算すればよいから、

$$24 \times 49 = 1176$$

より、十の位の数字は7である。

(答) 7

(2)

(1)と同様に考えていく。 $k=8$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 10^6 \cdot 7^8$$

であり、少なくとも百万の位までは数字は0である。よって、十万の位の数字を考えるには、 $k=9, 10$ のときのみを考えればよい。よって、

$$\begin{aligned}
 1024 \cdot (10 \times 10^3 \times 7^9 + 7^{10}) &= 1024 \times 7^9 \times 10007 \\
 &= 413510190334976
 \end{aligned}$$

となるから、十万の位の数字は3である。

(答) 3

(3)

$k=0$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_0 \cdot 10^{30} = 1024 \cdot 10^{30}$$

であり、 $k=1$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_1 \cdot 10^{27} \cdot 7 = 1024 \cdot 7 \cdot 10^{28}$$

であり、 $k=2$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_2 \cdot 10^{24} \cdot 7^2 = \frac{1024 \cdot 9 \cdot 7^2}{2} \cdot 10^{25}$$

である。よって、上3桁の数字を求めるには、 $k=0, 1$ のときのみを考えればよい。よって、

$$\begin{aligned}
 1024 \cdot 10^{30} + 1024 \cdot 7 \cdot 10^{28} &= 1024 \cdot (10^2 + 7) \cdot 10^{28} \\
 &= 109568 \cdot 10^{28}
 \end{aligned}$$

となるから、上3桁の数字は109である。

(答) 109

$$\begin{aligned}
 aI + bJ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 aI + bJ &= r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= r \cdot f(\theta)
 \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であり

$$f(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする。このとき、 A, B は U に属するから、それぞれ

$$A = r_A \cdot f(\theta_A), B = r_B \cdot f(\theta_B) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。

(1)

①より、

$$\begin{aligned}
 AB &= r_A r_B \cdot f(\theta_A) \cdot f(\theta_B) \\
 &= r_A r_B \cdot f(\theta_A + \theta_B)
 \end{aligned}$$

となるため、 AB は U に属する。

(証明終)

(2)

①より、

$$\begin{aligned}
 BA &= r_B r_A \cdot f(\theta_B) \cdot f(\theta_A) \\
 &= r_A r_B \cdot f(\theta_A + \theta_B)
 \end{aligned}$$

となるため、(1)より、 $AB = BA$ である。

(証明終)

(3)

$AB = O$ のとき、

$$\begin{aligned}
 AB &= O \\
 \Leftrightarrow r_A r_B \cdot f(\theta_A + \theta_B) &= O
 \end{aligned}$$

である。 $f(\theta_A + \theta_B) = 0$ となることはないから、 $r_A r_B = 0$ である。よって、 $r_A = 0$ または $r_B = 0$ 、すなわち、 $A = O$ または $B = O$ である。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}
 A^4 + I &= O \\
 \Leftrightarrow A^4 &= -I \\
 \Leftrightarrow \{r_A f(\theta_A)\}^4 &= -I \\
 \Leftrightarrow r_A^4 f(4\theta_A) &= -I
 \end{aligned}$$

と変形できる。よって、

$$\begin{aligned}
 r_A^4 \begin{pmatrix} \cos 4\theta_A & -\sin 4\theta_A \\ \sin 4\theta_A & \cos 4\theta_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} r_A^4 \cos 4\theta_A = -1 \\ r_A^4 \sin 4\theta_A = 0 \end{cases} \\
 \therefore r_A = 1, \theta_1 &= \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 n は整数である。 $0 \leq \theta_A < 2\pi$ より、

$$\theta_A = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

だから、 $A^4 + I = O$ を満たすすべての A は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(1)

$$r_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が、正の整数 n について、 $x \geq 0$ のときに $r_n(x) \geq 0$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき、①は、

$$r_1(x) = e^x - (1+x)$$

となり、

$$r_1'(x) = e^x - 1$$

である。 $x \geq 0$ のとき、 $r_1'(x) \geq 0$ だから、 $r_1(x)$ は増加関数であり、 $r_1(0) = 1 - 1 = 0$ より、

$x \geq 0$ のときに $r_1(x) \geq 0$ である。

[2] $n=k$ のとき

このとき、①は、

$$r_k(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

であり、 $x \geq 0$ のときに $r_k(x) \geq 0$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$r_{k+1}(x) = e^x - \left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}\right\}$$

$$r_{k+1}'(x) = e^x - \left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right\}$$

である。 $x \geq 0$ のとき、[2]の仮定より $r_{k+1}'(x) \geq 0$ だから、 $r_{k+1}(x)$ は増加関数であり、

$r_{k+1}(0) = 1 - 1 = 0$ より、 $x \geq 0$ のときに $r_{k+1}(x) \geq 0$ である。

以上、[1], [2]より、正の整数 n について、 $x \geq 0$ のときに $r_n(x) \geq 0$ が成り立つことが示せた。

(証明終)

(2)

(1)より、 $x \geq 0$ のとき、

$$r_{n+1}(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^x &\geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &\geq \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x \geq 0$ のとき、

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq \frac{x^n}{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$$

となるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ である。

(証明終)

(3)

$$f(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx = f_n(t)$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \int_0^t x^n e^{-x} dx \\ &= \left[x^n (-e^{-x}) \right]_0^t - \int_0^t n x^{n-1} (-e^{-x}) dx \\ &= -t^n e^{-t} + n f_{n-1}(t) \end{aligned}$$

となる。ただし、 n は 2 以上の整数である。よって、(2)を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^n e^{-t}) + \lim_{t \rightarrow \infty} n f_{n-1}(t) \\ &= n \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^{n-1} e^{-t}) + \lim_{t \rightarrow \infty} (n-1) f_{n-2}(t) \right\} \\ &= \cdots \\ &= n! \end{aligned}$$

であることが予想される。これより、正の整数 n に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = n! \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_0^t x e^{-x} dx \\ &= \left[x (-e^{-x}) \right]_0^t - \int_0^t (-e^{-x}) dx \\ &= -t e^{-t} - \left[e^{-x} \right]_0^t \\ &= -t e^{-t} - (e^{-t} - 1) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -t e^{-t} - (e^{-t} - 1) \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから、③は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_k(t) = k!$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$f_{k+1}(t) = -t^{k+1} e^{-t} + (k+1) f_k(t)$$

であり、(2)と[2]の仮定より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f_{k+1}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^{k+1} e^{-t}) + \lim_{t \rightarrow \infty} (k+1) f_k(t) \\ &= 0 + (k+1) \cdot k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

となるから、③は成り立つ。

以上、[1], [2]より、正の整数 n に対して、③が成り立つことが示せた。よって、求める解は

$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = n!$ である。

(答) $\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = n!$