

(1)

N, R, W が1つずつ, G が2つ, A が5つあることから, この10個の文字の並べ方は全部で

$$\frac{10!}{5!2!} = 15120 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 15120 通り

(2)

「NAGARA」という連続した6文字を1つのかたまりとみなせば, 求める並べ方は NAGARA, A, A, G, W の5つのかたまりの並べ方に等しいため,

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 60 通り

(3)

まず, N, R, W の3文字が入る位置を決め, 残りの7か所に対し, A を5つ, G を2つ当てはめればよい。N, R, W の入る位置の決め方は ${}_{10}C_3$ 通りであり, 残りの7文字の並べ方は $\frac{7!}{5!2!}$

通りであるから, 求める並べ方の総数は

$${}_{10}C_3 \cdot \frac{7!}{5!2!} = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 2520 通り

(4)

A 同士が隣り合わないような並べ方は,

$$\begin{array}{ll} \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{1} \\ A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{2} \\ A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{3} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{4} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A & \cdots \textcircled{5} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc & \cdots \textcircled{6} \end{array}$$

の6通り存在する。

[1] ①, ⑥の場合

○に残りの文字 G, G, N, R, W を当てはめると,

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] ②～⑤の場合

○に残りの文字 G, G, N, R, W を当てはめればよいが, G が連続した2つの○に GG と入った場合は条件を満たさないことに注意すると,

$$\frac{5!}{2!} - 3! = 54 \text{ (通り)}$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める並べ方は

$$60 \times 2 + 54 \times 4 = 336 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 336 通り

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2px + q \\ &= (x-p)^2 + q - p^2 \end{aligned}$$

と平方完成できるから、関数 $f(x)$ は $x=p$ で最小値 $q-p^2$ をとる。したがって、条件より

$$\begin{aligned} q - p^2 &= -4 \\ \therefore q &= p^2 - 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $q = p^2 - 4$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + (p+2)(p-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x-(p-2)\}\{x-(p+2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = p-2, p+2 \end{aligned}$$

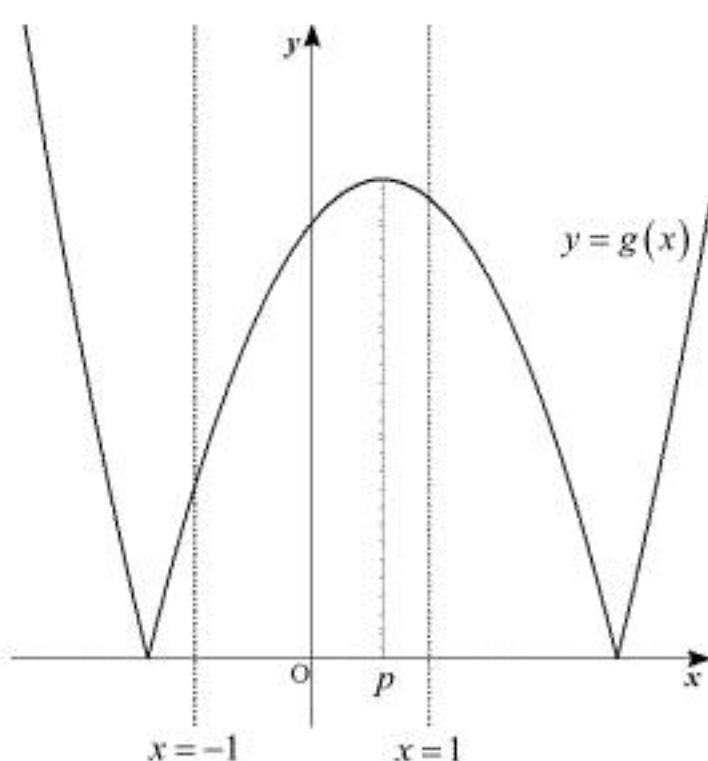
となる。

(答) $x = p-2, p+2$

(3)

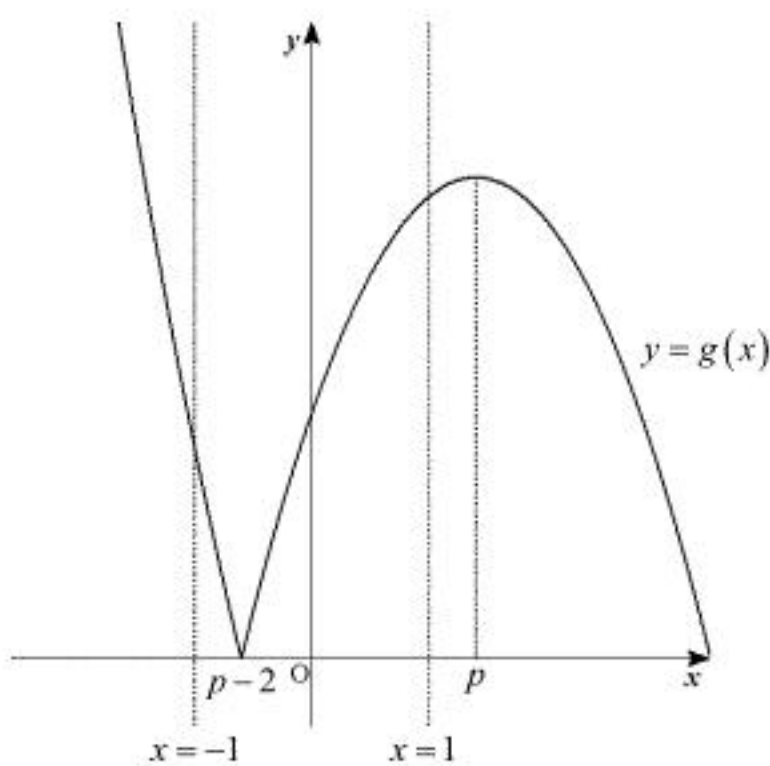
p の値で場合分けを行う。

[1] $0 < p \leq 1$ のとき



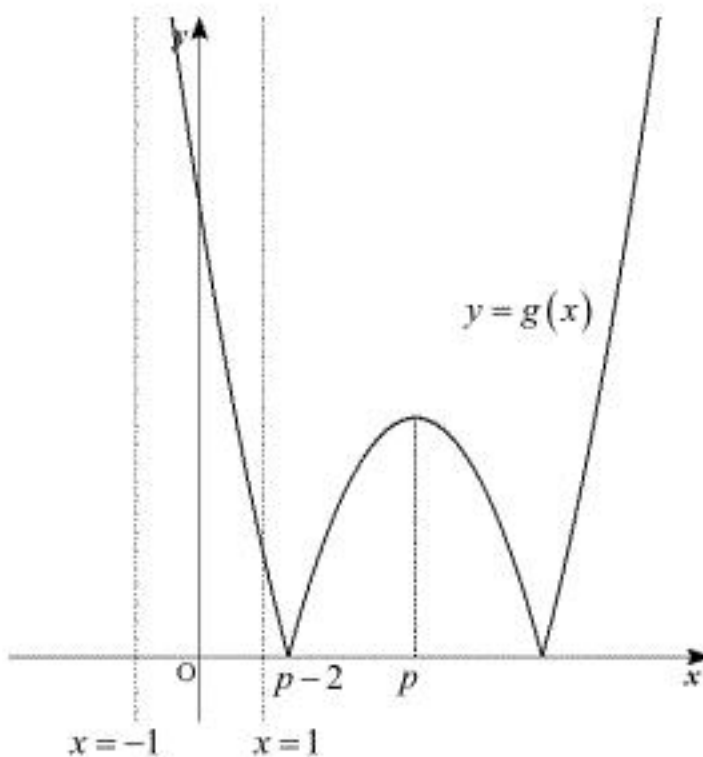
上図より、関数 $g(x)$ の最小値を与える x は $x = -1$ である。

[2] $1 < p \leq 3$ のとき



上図より、関数 $g(x)$ の最小値を与える x は $x = p-2$ である。

[3] $p > 3$ のとき



上図より、関数 $g(x)$ の最小値を与える x は $x = 1$ である。

以上[1], [2], [3]より、関数 $g(x)$ の最小値を与える x は、

$$\begin{cases} x = -1 & (0 < p \leq 1) \\ x = p-2 & (1 < p \leq 3) \\ x = 1 & (p > 3) \end{cases}$$

となる。

(答) 前表

(1)

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = -2mx + 3m^2$ の共有点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 &= -2mx + 3m^2 \\ \Leftrightarrow (x-m)(x+3m) &= 0 \\ \therefore x &= -3m, m \end{aligned}$$

となるから、共有点の座標はそれぞれ $(-3m, 9m^2)$, (m, m^2) となる。

(答) $(-3m, 9m^2), (m, m^2)$

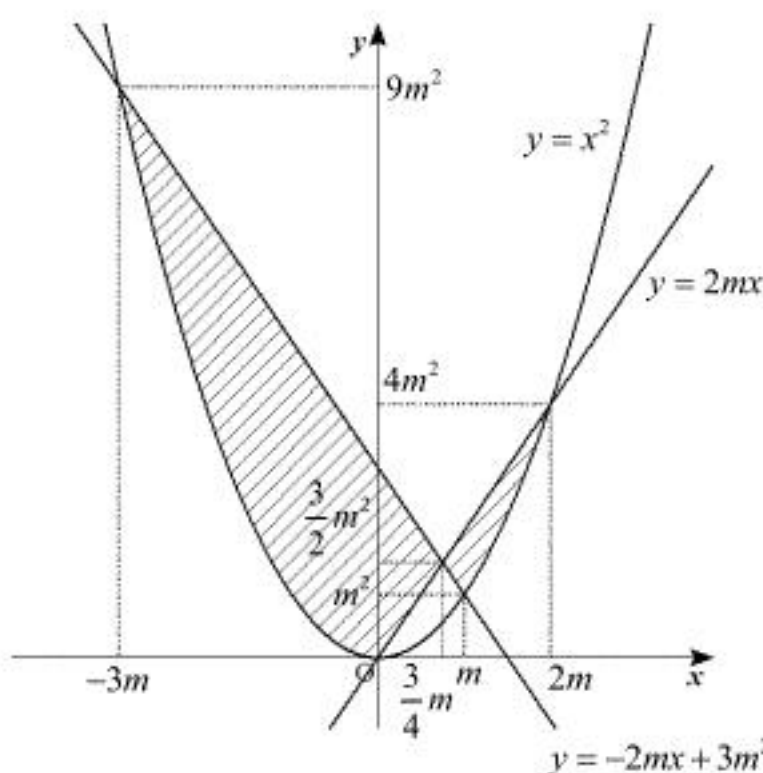
(2)

$$\begin{aligned} (y-2mx)(y+2mx-3m^2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (y-2mx \leq 0 \text{ かつ } y+2mx-3m^2 \geq 0) \\ &\text{または } (y-2mx \geq 0 \text{ かつ } y+2mx-3m^2 \leq 0) \\ \Leftrightarrow (y \leq 2mx \text{ かつ } y \geq -2mx+3m^2) &\text{または } (y \geq 2mx \text{ かつ } y \leq -2mx+3m^2) \end{aligned}$$

と変形できる。また、直線 $y = 2mx$ と直線 $y = -2mx + 3m^2$ の交点の座標は、

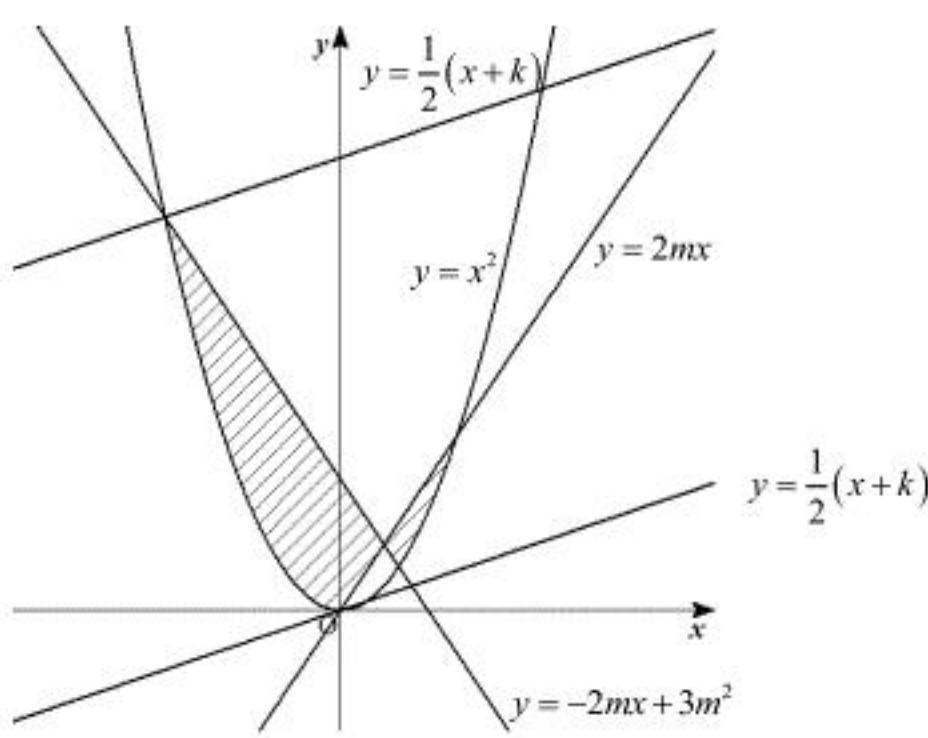
$$\begin{aligned} 2mx &= -2mx + 3m^2 \\ \Leftrightarrow 4mx &= 3m^2 \\ \therefore x &= \frac{3}{4}m \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

より、 $\left(\frac{3}{4}m, \frac{3}{2}m^2\right)$ である。以上より、領域 D を図示すると下図のようになる。



(答) 前図

(3)



$2y - x = k$ とおくと、 $y = \frac{1}{2}(x+k)$ と変形でき、これは傾きが $\frac{1}{2}$ で、 y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線が領域 D を通過するとき、図より、 y 切片が最大となるのは点 $(-3m, 9m^2)$ を通過する場合であるから、 k の最大値は

$$k = 2 \cdot 9m^2 - (-3m) = 18m^2 + 3m$$

である。一方、図より、 y 切片が最小となるのは、点 $(0, 0)$ または点 (m, m^2) を通過する場合のいずれかである。ここで、点 $(0, 0)$ を通過するとき、

$$k = 2 \cdot 0 - 0 = 0$$

であり、点 (m, m^2) を通過するとき、

$$k = 2 \cdot m^2 - m = 2m^2 - m$$

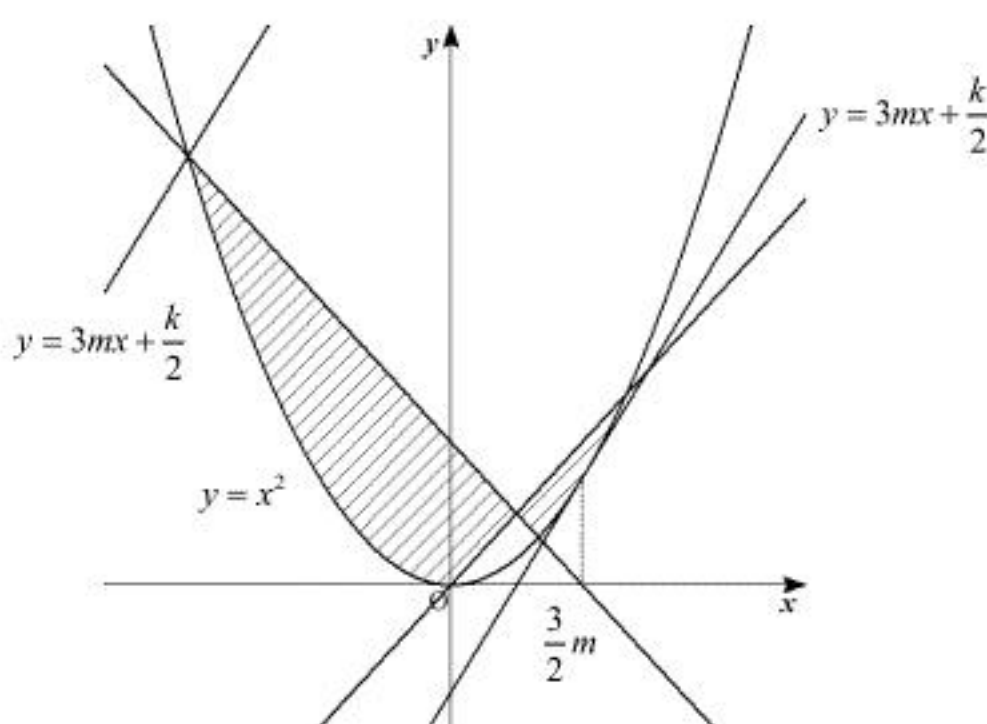
となるが、

$$2m^2 - m = m(2m - 1) > 0 \quad (\because m > 1)$$

であるから、 k の最小値は 0 である。

(答) 最大値: $18m^2 + 3m$, 最小値: 0

(4)



$2y - 6mx = k$ とおくと、 $y = 3mx + \frac{k}{2}$ と変形でき、これは傾きが $3m$ 、 y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線が領域 D を通過するとき、図より、 y 切片が最大となるのは点 $(-3m, 9m^2)$ を通過する場合であるから、 k の最大値は

$$k = 2 \cdot 9m^2 - 6m(-3m) = 36m^2$$

となる。一方、 y 切片が最小となるのは、放物線と直線が接する場合である。放物線 $y = x^2$ の導関数が $y' = 2x$ であることから、接点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x &= 3m \\ \therefore x &= \frac{3}{2}m \end{aligned}$$

となり、接点の座標は $\left(\frac{3}{2}m, \frac{9}{4}m^2\right)$ となる。したがって、 k の最小値は

$$\begin{aligned} k &= 2 \cdot \frac{9}{4}m^2 - 6m\left(\frac{3}{2}m\right) \\ &= -\frac{9}{2}m^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 最大値 $36m^2$, 最小値 $-\frac{9}{2}m^2$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)(3x^2 - 6x + 1) + \frac{-4x+1}{3}$$

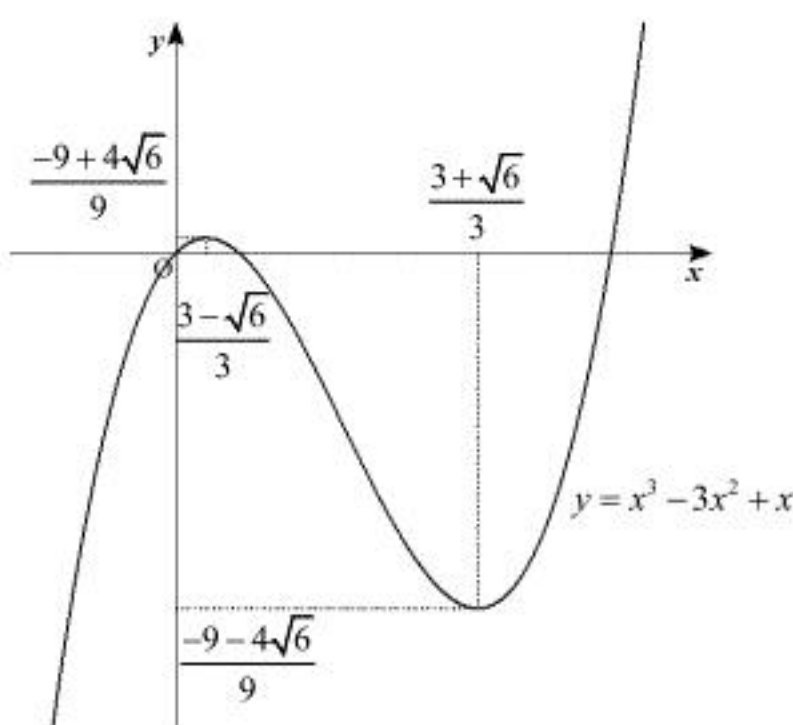
より、

$$f\left(\frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-9 \mp 4\sqrt{6}}{9}$$

となる。以上より、 $y = f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	...	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{-9+4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	$\frac{-9-4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$

また、グラフは以下のようになる。

(答) 極大値 $\frac{-9+4\sqrt{6}}{9}$, 極小値 $\frac{-9-4\sqrt{6}}{9}$, 前図

(2)

直線 $y = ax$ と曲線 $C: y = x^3 - 3x^2 + x$ の方程式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} ax &= x^3 - 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 1 - a) &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、直線と曲線は少なくとも $x=0$ で1点を共有する。ここで、直線 $y = ax$ と C の共有点が異なる2点のみであるとき、考えられる可能性は以下の2通りである。[1] $x^2 - 3x + 1 - a = 0$ が重解を持ち、その解が $x \neq 0$ であるときこのとき、 $x^2 - 3x + 1 - a = 0$ の判別式を D とおくと、重解をもつことから、

$$\begin{aligned} D &= 3^2 - 4(1-a) \\ &= 5 + 4a \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}$$

となる。このとき、 $x^2 - 3x + 1 - a = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となり、 $0 \neq \frac{3}{2}$ から条件を満たす。また、共有点の x 座標は $x=0, \frac{3}{2}$ である。[2] $x^2 - 3x + 1 - a = 0$ が $x=0$ を解に持ち、もう1つの解が $x \neq 0$ を満たすときこのとき、 $x=0$ が2次方程式の解であることから、

$$\begin{aligned} 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 - a &= 0 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $x^2 - 3x + 1 - a = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 3 \end{aligned}$$

となるから、条件を満たす。また、共有点の x 座標は $x=0, 3$ である。以上[1],[2]より、求める a の値および共有点の座標は、

$$a = -\frac{5}{4} \left(x=0, \frac{3}{2} \right) \text{ または } a = 1 \left(x=0, 3 \right)$$

である。

(答) $a = -\frac{5}{4} \left(x=0, \frac{3}{2} \right), a = 1 \left(x=0, 3 \right)$

(3)

接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= (3t^2 - 6t + 1)x - 2t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$

である。ここで、 ℓ と C の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - (3t^2 - 6t)x + 2t^3 - 3t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2 \{x - (3-2t)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= t, 3-2t \end{aligned}$$

となる。したがって、 ℓ と C の共有点が P のみであるとき、

$$\begin{aligned} t &= 3-2t \\ \Leftrightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

となればよい。

(答) $t=1$

(1)

$$\begin{cases} a+b=2p \\ ab=1 \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 4p^2 - 2 \\ &= 2(2p^2 - 1) \\ a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 8p^3 - 6p \\ &= 2(4p^3 - 3p) \end{aligned}$$

となるから, a^2+b^2 と a^3+b^3 はともに偶数となる。

(証明終)

(2)

$$a^n + b^n \text{ が偶数である} \quad \dots \text{①}$$

ことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=2, 3$ のとき

(1)の結果より, ①は成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき①が成り立つと仮定したとき c_{k+1}, c_k を整数とすると,

$$\begin{cases} a^{k+1} + b^{k+1} = 2c_{k+1} \\ a^k + b^k = 2c_k \end{cases}$$

とおける。このとき,

$$\begin{aligned} a^{k+2} + b^{k+2} &= (a+b)(a^{k+1} + b^{k+1}) - ab(a^k + b^k) \\ &= 2p \cdot 2c_{k+1} - 2c_k \\ &= 2(2pc_{k+1} - c_k) \end{aligned}$$

となり, $a^{k+2} + b^{k+2}$ は偶数となる。したがって, $n=k+2$ のときも①は成り立つ。

以上[1], [2]から, 数学的帰納法より題意は示された。

(証明終)

(3)

 $p \geq 2$ より,

$$\begin{aligned} b &= p - \sqrt{p^2 - 1} > 0 \\ b &= p - \sqrt{p^2 - 1} = \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < b < 1$$

が成り立つ。したがって, $0 < b^n < 1$ である。ここで(2)の結果より, c_n を整数として $a^n + b^n = 2c_n$ と置くことができるので,

$$\begin{aligned} 0 &< 2c_n - a^n < 1 \\ \Leftrightarrow 2c_n - 1 &< a^n < 2c_n \end{aligned}$$

となり,

$$[a^n] = 2c_n - 1$$

となる。したがって, $[a^n]$ は奇数である。

(証明終)