

(1)

N, R, W が1つずつ, G が2つ, A が5つあることから, この10個の文字の並べ方は全部で

$$\frac{10!}{5!2!} = 15120 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 15120 通り

(2)

「NAGARA」という連続した6文字を1つのかたまりとみなせば, 求める並べ方は  
NAGARA, A, A, G, W の5つのかたまりの並べ方に等しいため,

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 60 通り

(3)

まず, N, R, W の3文字が入る位置を決め, 残りの7か所に対し, A を5つ, G を2つ当ては

めればよい。N, R, W の入る位置の決め方は  ${}_{10}C_3$  通りであり, 残りの7文字の並べ方は  $\frac{7!}{5!2!}$

通りであるから, 求める並べ方の総数は

$${}_{10}C_3 \cdot \frac{7!}{5!2!} = 2520 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 2520 通り

(4)

A 同士が隣り合わないような並べ方は,

$$\begin{array}{ll} \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{1} \\ A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{2} \\ A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{3} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A \bigcirc A & \cdots \textcircled{4} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc \bigcirc A & \cdots \textcircled{5} \\ A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc A \bigcirc & \cdots \textcircled{6} \end{array}$$

の6通り存在する。

[1] ①, ⑥の場合

○に残りの文字G, G, N, R, W を当てはめると,

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] ②～⑤の場合

○に残りの文字G, G, N, R, W を当てはめればよいが, G が連続した2つの○にGG と  
入った場合は条件を満たさないことに注意すると,

$$\frac{5!}{2!} - 3! = 54 \text{ (通り)}$$

となる。

以上[1], [2]より, 求める並べ方は

$$60 \cdot 2 + 54 \cdot 4 = 336 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 336 通り

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2px + q \\ &= (x-p)^2 + q - p^2 \end{aligned}$$

と平方完成できるから、関数  $f(x)$  は  $x=p$  で最小値  $q-p^2$  をとる。したがって、条件より

$$q - p^2 = -4$$

$$\therefore q = p^2 - 4$$

となる。

(答)  $q = p^2 - 4$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2px + (p+2)(p-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (p-2)\}\{x - (p+2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = p-2, p+2 \end{aligned}$$

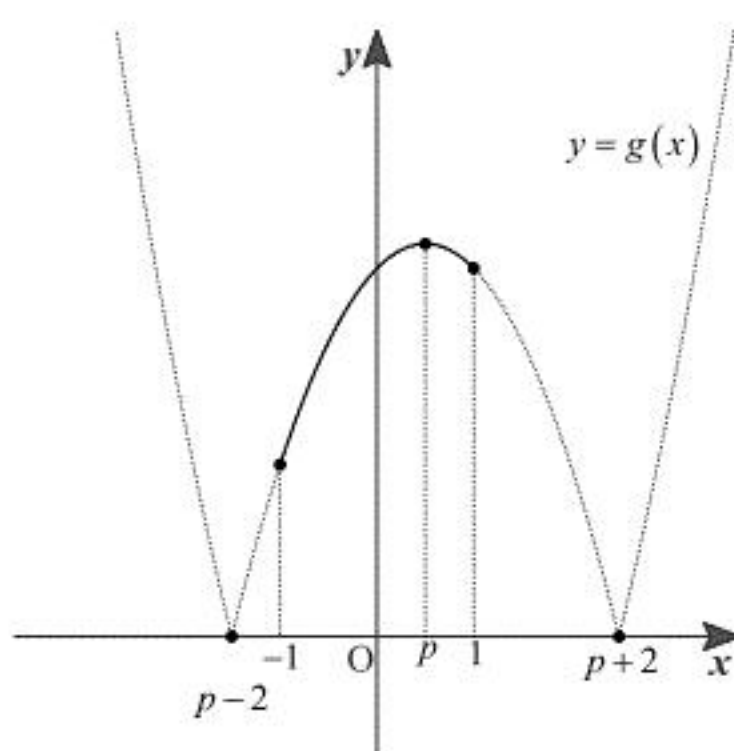
となる。

(答)  $x = p-2, p+2$

(3)

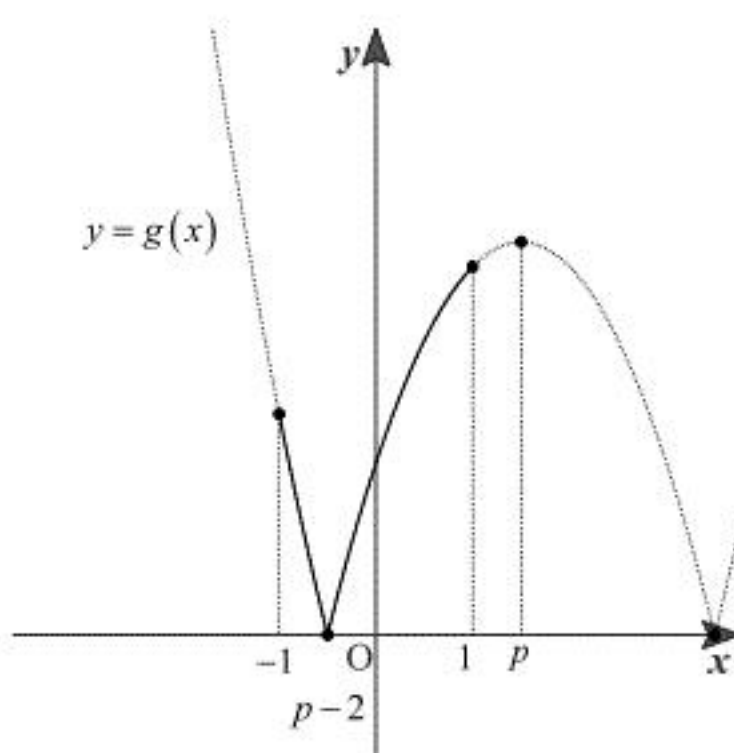
$p$  の値で場合分けを行う。

[1]  $0 < p \leq 1$  のとき



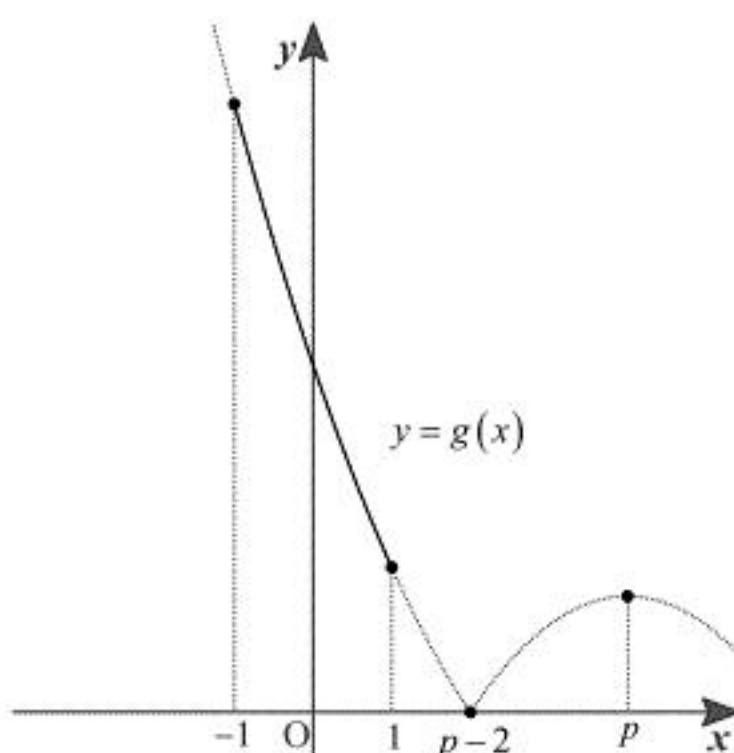
上図より、関数  $g(x)$  の最小値を与える  $x$  は  $x = -1$  である。

[2]  $1 < p \leq 3$  のとき



上図より、関数  $g(x)$  の最小値を与える  $x$  は  $x = p-2$  である。

[3]  $p > 3$  のとき



上図より、関数  $g(x)$  の最小値を与える  $x$  は  $x = 1$  である。

以上[1], [2], [3]より、関数  $g(x)$  の最小値を与える  $x$  は、

$$\begin{cases} x = -1 & (0 < p \leq 1) \\ x = p-2 & (1 < p \leq 3) \\ x = 1 & (p > 3) \end{cases}$$

となる。

(答) 前表

3

(1)

曲線  $y = x^2$  と直線  $y = -2mx + 3m^2$  の共有点の  $x$  座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 &= -2mx + 3m^2 \\ \Leftrightarrow (x-m)(x+3m) &= 0 \\ \therefore x &= -3m, m \end{aligned}$$

となるから、共有点の座標はそれぞれ  $(-3m, 9m^2)$ ,  $(m, m^2)$  となる。

(答)  $(-3m, 9m^2), (m, m^2)$

(2)

$$\begin{aligned} (y-2mx)(y+2mx-3m^2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (y-2mx \leq 0 \text{ かつ } y+2mx-3m^2 \geq 0) \\ &\quad \text{または } (y-2mx \geq 0 \text{ かつ } y+2mx-3m^2 \leq 0) \\ \Leftrightarrow (y \leq 2mx \text{ かつ } y \geq -2mx+3m^2) &\text{ または } (y \geq 2mx \text{ かつ } y \leq -2mx+3m^2) \end{aligned}$$

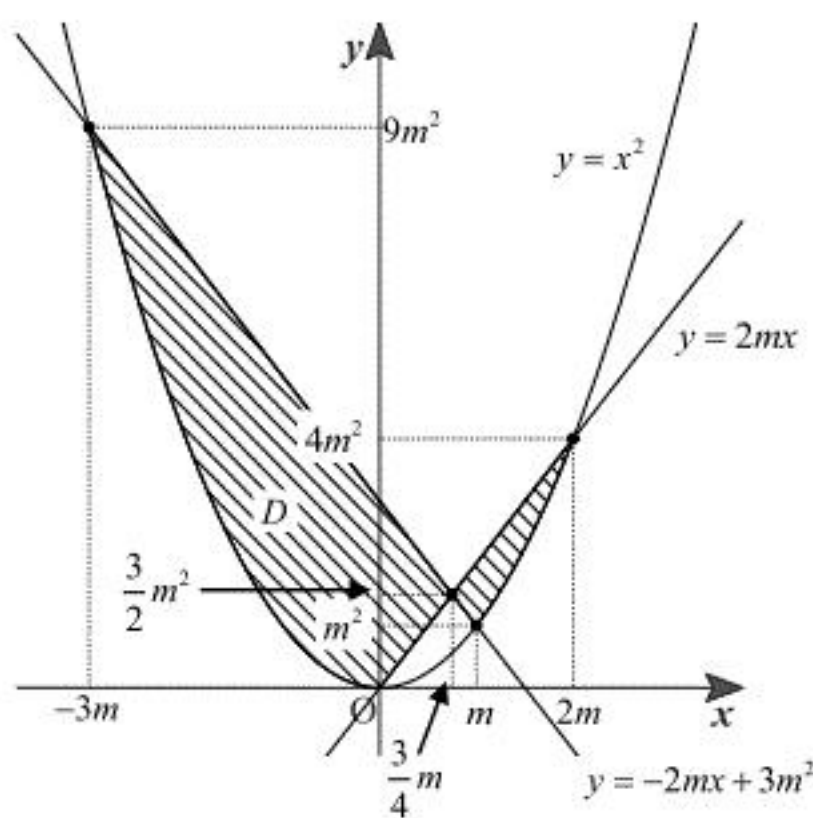
と変形できる。また、直線  $y = 2mx$  と直線  $y = -2mx + 3m^2$  の交点の座標は、

$$\begin{aligned} 2mx &= -2mx + 3m^2 \\ \Leftrightarrow 4mx &= 3m^2 \\ \therefore x &= \frac{3}{4}m \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

より、 $(\frac{3}{4}m, \frac{3}{2}m^2)$  であり、直線  $y = 2mx$  と曲線  $y = x^2$  の交点の座標は、

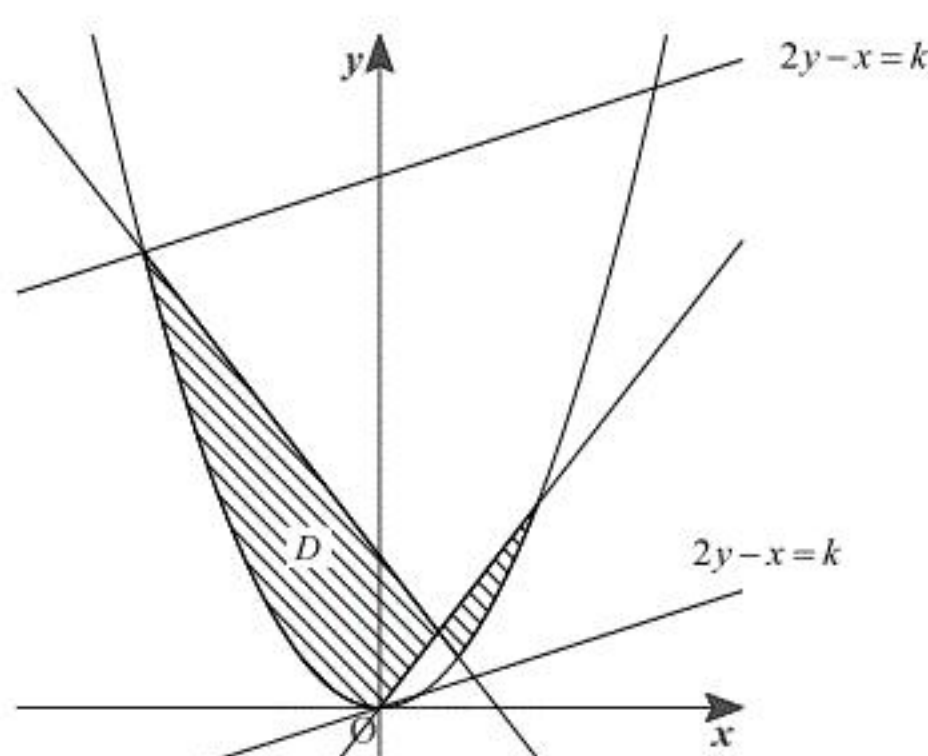
$$\begin{aligned} 2mx &= x^2 \\ \Leftrightarrow x(x-2m) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2m \end{aligned}$$

より、 $(0, 0), (2m, 4m^2)$  である。以上より、領域  $D$  を図示すると下図のようになる(境界を含む)。



(答) 前図(境界を含む)

(3)



$2y - x = k$  とおくと、 $y = \frac{1}{2}(x+k)$  と変形でき、これは傾きが  $\frac{1}{2}$  で、 $y$  切片が  $\frac{k}{2}$  の直線を表す。

この直線が領域  $D$  を通過するとき、図より、 $y$  切片が最大となるのは点  $(-3m, 9m^2)$  を通過する場合であるから、 $k$  の最大値は

$$k = 2 \cdot 9m^2 - (-3m) = 18m^2 + 3m$$

である。一方、図より、 $y$  切片が最小となるのは、点  $(0, 0)$  または点  $(m, m^2)$  を通過する場合のいずれかである。ここで、点  $(0, 0)$  を通過するとき、

$$k = 2 \cdot 0 - 0 = 0$$

であり、点  $(m, m^2)$  を通過するとき、

$$k = 2 \cdot m^2 - m = 2m^2 - m$$

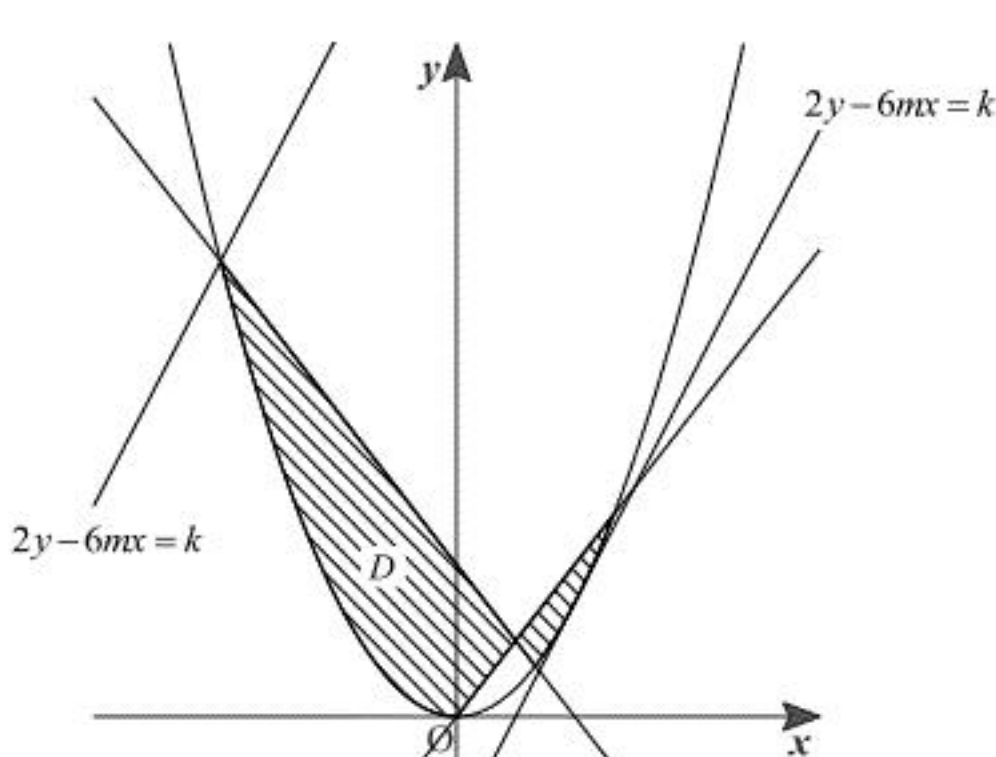
となるが、

$$2m^2 - m = m(2m-1) > 0 \quad (\because m > 1)$$

であるから、 $k$  の最小値は 0 である。

(答) 最大値:  $18m^2 + 3m$ , 最小値: 0

(4)



$2y - 6mx = k$  とおくと、 $y = 3mx + \frac{k}{2}$  と変形でき、これは傾きが  $3m$ 、 $y$  切片が  $\frac{k}{2}$  の直線を表す。

この直線が領域  $D$  を通過するとき、図より、 $y$  切片が最大となるのは点  $(-3m, 9m^2)$  を通過する場合であるから、 $k$  の最大値は

$$k = 2 \cdot 9m^2 - 6m(-3m) = 36m^2$$

となる。一方、 $y$  切片が最小となるのは、放物線と直線が接する場合である。放物線  $y = x^2$  の導関数が  $y' = 2x$  であることから、接点の  $x$  座標は

$$\begin{aligned} 2x &= 3m \\ \therefore x &= \frac{3}{2}m \end{aligned}$$

となり、接点の座標は  $(\frac{3}{2}m, \frac{9}{4}m^2)$  となる。したがって、 $k$  の最小値は

$$\begin{aligned} k &= 2 \cdot \frac{9}{4}m^2 - 6m\left(\frac{3}{2}m\right) \\ &= -\frac{9}{2}m^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 最大値  $36m^2$ , 最小値  $-\frac{9}{2}m^2$

(1)

曲線  $C$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= -e^{-t}x + (1+t)e^{-t} \end{aligned}$$

である。したがって、接線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標は、 $y=0$  を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= -e^{-t}x + (1+t)e^{-t} \\ \therefore x &= 1+t \end{aligned}$$

となる。一方、 $y$  軸との交点の  $y$  座標は  $y$  切片の値に等しく、 $(1+t)e^{-t}$  となる。したがって、

求める座標は  $P(1+t, 0)$ ,  $Q(0, (1+t)e^{-t})$  である。

(答)  $P(1+t, 0)$ ,  $Q(0, (1+t)e^{-t})$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(1+t)(1+t)e^{-t} \\ &= \frac{1}{2}(1+t)^2 e^{-t} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} S' &= (1+t)e^{-t} - \frac{1}{2}(1+t)^2 e^{-t} \\ &= \frac{1}{2}(1-t)(1+t)e^{-t} \end{aligned}$$

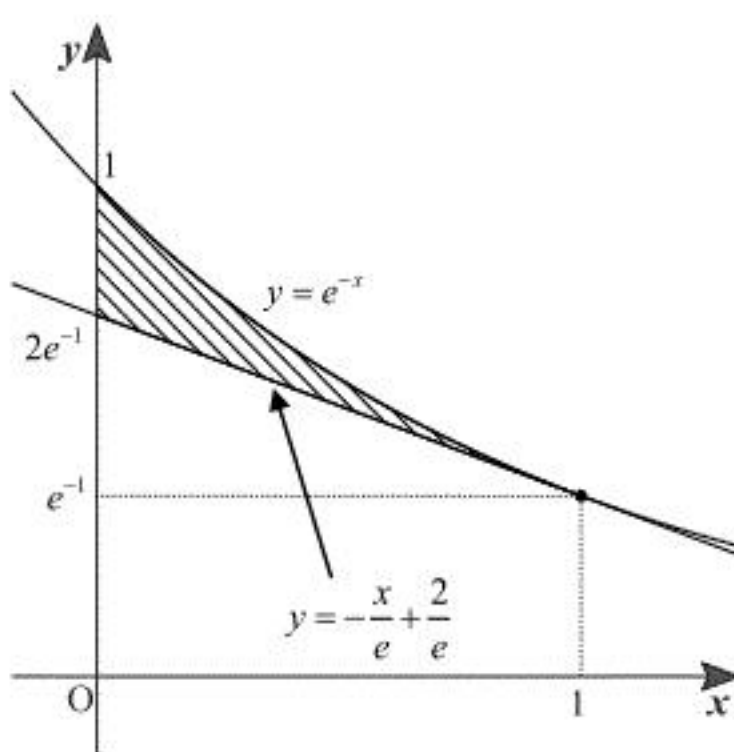
となり、 $S$  の増減表を書くと以下のようになる。

|      |          |            |   |            |
|------|----------|------------|---|------------|
| $t$  | 0        | ...        | 1 | ...        |
| $S'$ | $\times$ | +          | 0 | -          |
| $S$  | $\times$ | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |

したがって、 $t=1$  のとき  $S$  は最大値  $\frac{2}{e}$  をとり、このとき直線  $\ell$  の方程式は  $y = -\frac{x}{e} + \frac{2}{e}$  となる。

(答)  $S = \frac{2}{e}$ ,  $\ell: y = -\frac{x}{e} + \frac{2}{e}$

(3)



求める体積は、上図の斜線部を  $y$  軸のまわりに1回転してできる回転体の体積である。ここで、曲線  $C$  の方程式を  $x$  について解くと、

$$\begin{aligned} y &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow \log y &= -x \\ \therefore x &= -\log y \end{aligned}$$

となるから、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_{e^{-1}}^1 (-\log y)^2 dy - \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot (2e^{-1} - e^{-1}) &= \pi \left[ y(\log y)^2 \right]_{e^{-1}}^1 - \pi \int_{e^{-1}}^1 y \cdot \frac{2}{y} \log y dy - \frac{\pi}{3e} \\ &= -\frac{\pi}{e} - 2\pi \int_{e^{-1}}^1 \log y dy - \frac{\pi}{3e} \\ &= -\frac{4\pi}{3e} - 2\pi [y \log y - y]_{e^{-1}}^1 \\ &= -\frac{4\pi}{3e} - 2\pi \{ (0-1) - (-e^{-1} - e^{-1}) \} \\ &= 2\pi \left( 1 - \frac{8}{3e} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答)  $V = 2\pi \left( 1 - \frac{8}{3e} \right)$

(1)

$$\tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} \quad (\because \tan \beta \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ は整数})$$

となる。

(証明終)

(2)

加法定理を繰り返し利用すると、

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} \\ &= \frac{\tan x + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}}{1 - \tan x \cdot \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} \\ &= \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \\ &= \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan 3x = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

(3)

$$\begin{cases} y = c \tan x \\ y = \tan 3x \end{cases}$$

を  $t$  の式で表すと、

$$\begin{cases} y = ct \\ y = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \end{cases}$$

となる。ここで、 $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$  のとき、 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$  であり、この範囲で  $x$  と  $t$  は 1 対 1 対応していることから、 $t$  の解の個数を求めればよい。方程式から  $y$  を消去すると、

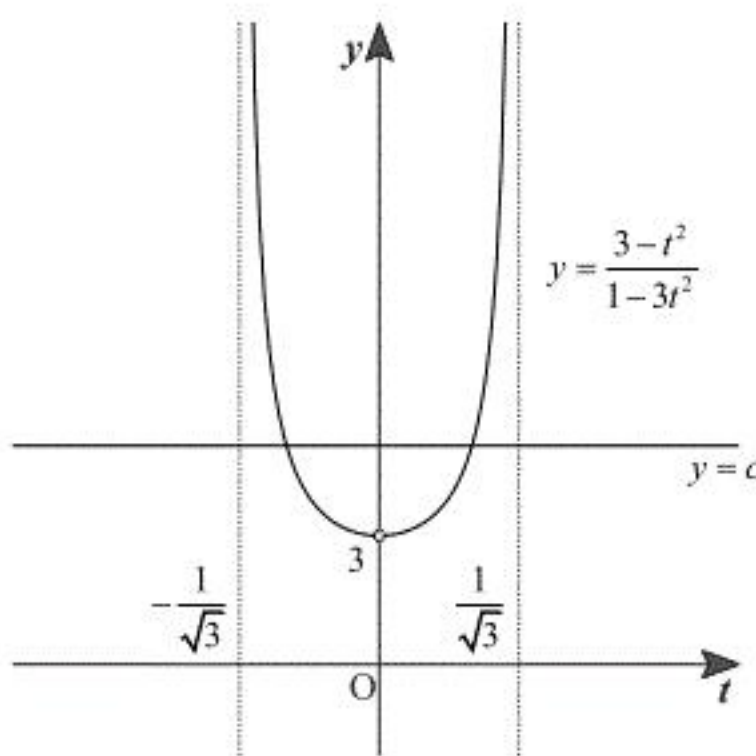
$$ct = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \Leftrightarrow t \left( \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} - c \right) = 0$$

より、 $t = 0$  は常に解となるから、 $t \neq 0$  として、 $\frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} - c = 0$  の解の個数を考える。これは、曲

線  $y = \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  と直線  $y = c$  の共有点の個数に等しい。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} &= \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{8}{1 - 3t^2} \right\} \\ \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} - 0} \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{8}{1 - 3t^2} \right\} &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} + 0} \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{8}{1 - 3t^2} \right\} = +\infty \end{aligned}$$

であることに注意すると、 $y = \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  と  $y = c$  のグラフは以下ようになる。



よって、 $y = \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  と  $y = c$  のグラフの共有点の個数は、 $t = 0$  を除くと、

$c \leq 3$  のとき、存在しない

$c > 3$  のとき、2 個

となる。以上より、求める共有点の個数は、 $c \leq 3$  のとき 1 個、 $c > 3$  のとき 3 個である。

(答)  $c \leq 3$  のとき 1 個、 $c > 3$  のとき 3 個