

1

(1)

$k=1$ のときに C が当たりくじを引くということは, A, B がともにはずれくじを引き, かつ C が当たりくじを引くということであるから, この確率は,

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

である。

(答) $\frac{1}{n}$

(2)

$k=2$ のときに C が当たりくじを引くという場合は,

A, B がともにはずれくじを引き, かつ C が当たりくじを引く場合

A, B のどちらか一方のみが当たりくじを引き, かつ C が当たりくじを引く場合

のいずれかである。A, B がともにはずれくじを引き, かつ C が当たりくじを引く確率は,

$$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

であり, A, B のどちらか一方のみが当たりくじを引き, かつ C が当たりくじを引く確率は,

$$\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \right) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{4}{n(n-1)}$$

であるから, 求める確率は,

$$\frac{2(n-3)}{n(n-1)} + \frac{4}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

(答) $\frac{2}{n}$

(3)

$k \geq 3$ のとき, A, B がともに当たりくじを引く確率は,

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

である。

(答) $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

(4)

$k \geq 3$ のとき, A がはずれくじを引き, かつ B が当たりくじを引く確率は,

$$\frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

である。

(答) $\frac{k(n-k)}{n(n-1)}$

(5)

$k \geq 3$ のとき, A が当たりくじを引き, かつ B がはずれくじを引く確率は,

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

である。また, A, B がともにはずれくじを引く確率は,

$$\frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k-1}{n-1} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

である。これらと(3), (4)より, C が当たりくじを引く確率は,

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{k-2}{n-2} + 2 \cdot \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \cdot \frac{k-1}{n-2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{k}{n-2} = \frac{k}{n}$$

と求めることができる。

(答) $\frac{k}{n}$

(1)

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta$$

と変形できるので、「すべての実数 x について $x^2 + \alpha x + \beta > 0$ である」が成り立つための α, β に関する必要十分条件は、

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{4} + \beta &> 0 \\ \therefore \alpha^2 - 4\beta &< 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha^2 - 4\beta < 0$

(2)

$a \neq 0$ のとき、 $y = -\frac{b}{a}$ となるような実数 y が存在するが、このとき、

$$ay + b = 0$$

となるので、「すべての実数 y について $ay + b < 0$ である」は成り立たない。また、 $a = 0$ のとき、

$$ay + b = b$$

となるので、「すべての実数 y について $ay + b < 0$ である」ことと $b < 0$ であることは同値となる。以上より、求める a, b に関する条件は、

$$a = 0 \text{ かつ } b < 0$$

である。

(答) $a = 0$ かつ $b < 0$

(3)

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + cy + d = \left\{x + \left(2y + \frac{5}{2}\right)\right\}^2 + (c - 10)y + d - \frac{25}{4}$$

と変形できるので、「すべての実数 x, y について $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + cy + d > 0$ である」が成り立つための必要十分条件は、

$$\text{「すべての実数 } y \text{ について } (c - 10)y + d - \frac{25}{4} > 0 \text{ である」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「すべての実数 } y \text{ について } (10 - c)y - d + \frac{25}{4} < 0 \text{ である」}$$

$$\Leftrightarrow 10 - c = 0 \text{ かつ } -d + \frac{25}{4} < 0 \quad (\because (2))$$

$$\Leftrightarrow c = 10 \text{ かつ } d > \frac{25}{4}$$

である。

(答) $c = 10$ かつ $d > \frac{25}{4}$

3

(1)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= \pm \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

と解くことができる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

(2)

3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta - k\cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta - k\cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \{4\cos^2 \theta - (k+3)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \text{ または } 4\cos^2 \theta - (k+3) &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta \leq 1$ であるから、与えられた方程式は、

$$4\cos^2 \theta - (k+3) = 0$$

と同値である。 $0 < 4\cos^2 \theta \leq 4$ であるから、この方程式が解をもつような正の整数 k は、

$$\begin{aligned}0 < k+3 &\leq 4 \\ \therefore k &= 1\end{aligned}$$

であり、その解は、

$$\begin{aligned}4\cos^2 \theta - 4 &= 0 \\ \therefore \theta &= 0 \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k=1, \theta=0$$

(3)

倍角の公式、および3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}m\cos \theta - 3\cos 3\theta + n(1 + \cos 2\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow m\cos \theta - 3(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + n\{1 + (2\cos^2 \theta - 1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \{-12\cos^2 \theta + 2n\cos \theta + (m+9)\} &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta \leq 1$ であるから、与えられた方程式は、

$$-12\cos^2 \theta + 2n\cos \theta + (m+9) = 0 \quad \cdots \text{①}$$

と同値である。ここで、 X の2次関数 $f(X)$ を、

$$f(X) = -12X^2 + 2nX + m+9 = -12\left(X - \frac{n}{12}\right)^2 + \frac{n^2}{12} + m+9$$

とおけば、①が解をもつことと放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わることは同値である。

放物線 $Y = f(X)$ は、軸: $X = \frac{n}{12}$ 、頂点 $\left(\frac{n}{12}, \frac{n^2}{12} + m+9\right)$ の放物線であり、 m, n が正の整数

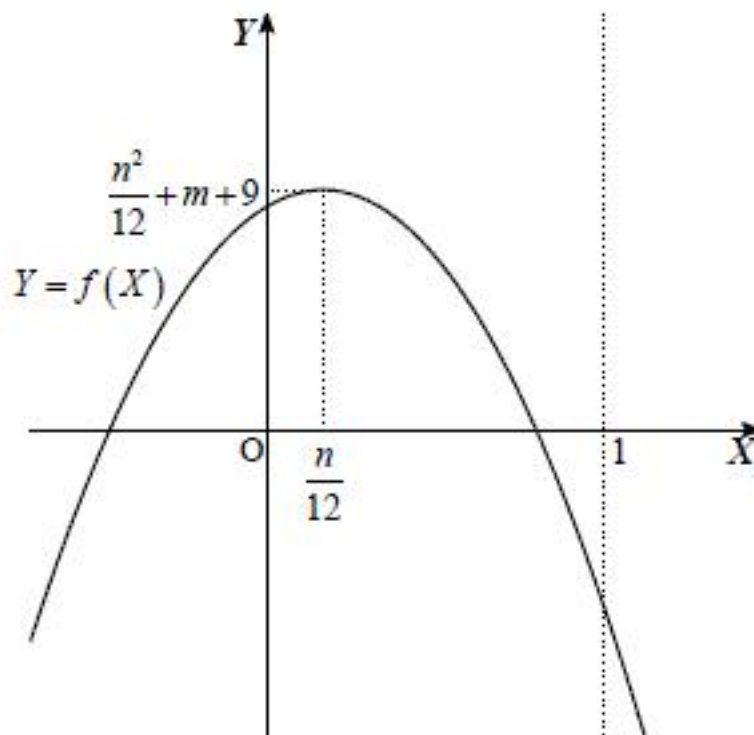
であることより、

$$\text{軸: } \frac{n}{12} > 0$$

$$\text{頂点の } Y \text{ 座標: } \frac{n^2}{12} + m+9 > 0$$

$$f(0) = m+9 > 0$$

が成り立つので、放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わる時以下の図のようになっている。



図より、放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わるための m, n の条件は、

$$0 < \frac{n}{12} \leq 1 \text{ かつ } f(1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{n}{12} \leq 1 \text{ かつ } 2n+m-3 \leq 0$$

$$\therefore (m, n) = (1, 1)$$

と求めることができる。このとき、与えられた方程式の解は、

$$\begin{aligned}-12\cos^2 \theta + 2\cos \theta + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (6\cos \theta + 5)(\cos \theta - 1) &= 0 \\ \therefore \theta &= 0 \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (m, n) = (1, 1), \theta = 0$$

(1)

数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = 1$ 、公差 1 の等差数列であるから、その一般項は、

$$r_n = n$$

である。従って、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = n^2 + \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = n^2 + \frac{1}{4}$$

(2)

題意より、

$$r_n^2 = a_n - \frac{1}{4}$$

であるから、円 C_n の方程式は、

$$C_n: x^2 + (y - a_n)^2 = a_n - \frac{1}{4}$$

となる。これと放物線 $P: y = x^2$ の共有点の y 座標は、これらの方程式から x を消去すること

で、

$$y + (y - a_n)^2 = a_n - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (1 - 2a_n)y + \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{y - \left(a_n - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 0$$

$$\therefore y = a_n - \frac{1}{2} = n^2 - \frac{1}{4}$$

と求めることができる。これより、共有点の x 座標は、

$$x = \pm\sqrt{y} = \pm\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad \left(\pm\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}, n^2 - \frac{1}{4}\right)$$

(3)

(2)と同様にして、

$$C_n: x^2 + (y - a_n)^2 = a_n - \frac{1}{4}$$

$$C_{n+1}: x^2 + (y - a_{n+1})^2 = a_{n+1} - \frac{1}{4}$$

を得る。円 C_n と円 C_{n+1} の共有点の y 座標は、これらの方程式から x を消去することで、

$$(y - a_{n+1})^2 - (y - a_n)^2 = \left(a_{n+1} - \frac{1}{4}\right) - \left(a_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2(a_{n+1} - a_n)y + (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = (a_{n+1} - a_n)$$

$$\Leftrightarrow -2y + (a_{n+1} + a_n) = 1 \quad (\because a_{n+1} - a_n \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{a_{n+1} + a_n - 1}{2} = n^2 + n + \frac{1}{4} \quad \left(\because a_n = n^2 + \frac{1}{4}\right)$$

と求めることができる。これを C_n の方程式に代入することで、共有点の x 座標は、

$$x^2 + \left(n^2 + n + \frac{1}{4} - a_n\right)^2 = a_n - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + n^2 = \left(n^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \quad \left(\because a_n = n^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore x = 0$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \left(0, n^2 + n + \frac{1}{4}\right)$$

(4)

$$a_1 = \frac{5}{4}, a_2 = \frac{17}{4}, a_3 = \frac{37}{4}$$

であるから、円 C_1, C_2, C_3 の方程式はそれぞれ、

$$C_1: x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$$

$$C_2: x^2 + \left(y - \frac{17}{4}\right)^2 = 4$$

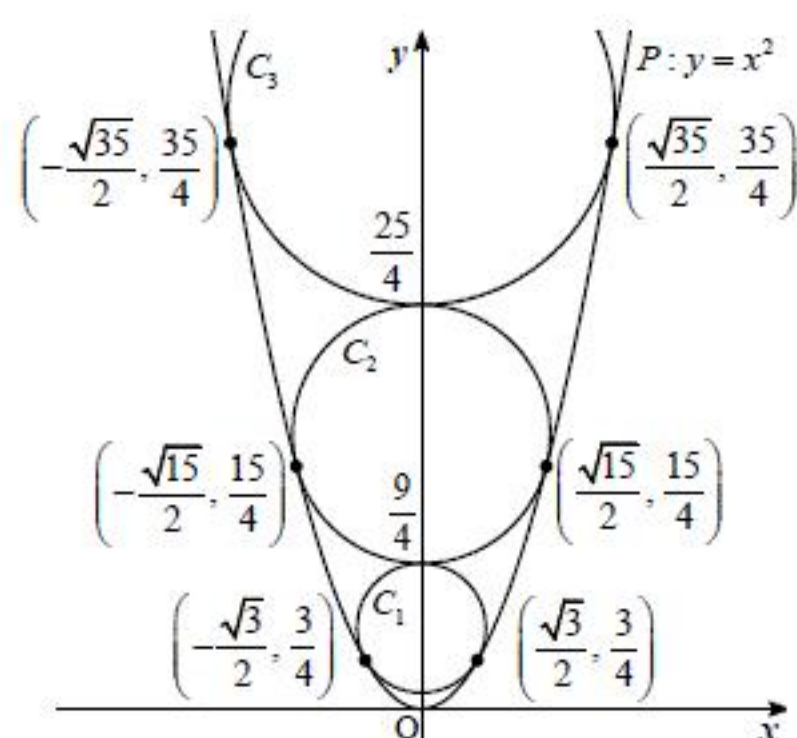
$$C_3: x^2 + \left(y - \frac{37}{4}\right)^2 = 9$$

である。また、(2)より円 C_1, C_2, C_3 と放物線 P の共有点の座標はそれぞれ

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{15}{4}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{35}{4}\right)$$

であり、(3)より円 C_1, C_2 の共有点の座標は $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ 、円 C_2, C_3 の共有点の座標は $\left(0, \frac{25}{4}\right)$ である

から、円 C_1, C_2, C_3 と放物線 P の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

5

(1)

題意より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

(2)

$\overrightarrow{CF}$ は実数 k を用いて,

$$\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CE} = \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b}$$

と表すことができる。このとき,

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1+k}{4}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b}$$

であるが, 点 F は辺 AB 上の点であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1+k}{4} + \frac{k}{6} &= 1 \\ \therefore k &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

が成り立つ。従って,

$$\overrightarrow{CF} = \frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b} = \frac{9}{20}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b}$$

と表すことができる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{9}{20}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b}$$

(3)

点 G は辺 AB を $7:1$ に外分する点であるから,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 7\overrightarrow{OB}}{7 + (-1)} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}$$

と表すことができる。従って,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CG} \\ &= -\overrightarrow{CE} + (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}\right) - \frac{1}{4}\vec{a} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

と求めることができる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{EG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

(4)

(1), (3)の結果より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EG} &= \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{6}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{36}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

と求めることができる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EG} = -\frac{1}{6}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{36}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}|\vec{b}|^2$$

(5)

$\triangle OAB$ が $OA = OB$ となる直角三角形であるとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{aligned}\cos \angle CEG &= \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EG}}{|\overrightarrow{CE}| |\overrightarrow{EG}|} \\ &= \frac{1}{|\overrightarrow{CE}| |\overrightarrow{EG}|} \cdot \left(-\frac{1}{6}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{36}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}|\vec{b}|^2\right) \\ &= 0 \\ \therefore \angle CEG &= 90^\circ\end{aligned}$$

と求めることができる。

$$\text{(答)} \quad \angle CEG = 90^\circ$$