

(1)

$k=1$ のときに C が当たりくじを引くということは、 A, B がともにはずれくじを引き、かつ C が当たりくじを引くということであるから、この確率は、

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{n}$$

(2)

$k=2$ のときに C が当たりくじを引くという場合は、 A, B がともにはずれくじを引き、かつ C が当たりくじを引く場合か、 A, B のどちらか一方のみが当たりくじを引き、かつ C が当たりくじを引く場合のいずれかである。 A, B がともにはずれくじを引き、かつ C が当たりくじを引く確率は、

$$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

であり、 A, B のどちらか一方のみが当たりくじを引き、かつ C が当たりくじを引く確率は、

$$\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \right) \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{4}{n(n-1)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{2(n-3)}{n(n-1)} + \frac{4}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{n}$$

(3)

$k \geq 3$ のとき、 A, B がともに当たりくじを引く確率は、

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

(4)

$k \geq 3$ のとき、 A がはずれくじを引き、かつ B が当たりくじを引く確率は、

$$\frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

(5)

$k \geq 3$ のとき、 A が当たりくじを引き、かつ B がはずれくじを引く確率は、

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

である。また、 A, B がともにはずれくじを引く確率は、

$$\frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k-1}{n-1} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

である。これらと(3),(4)より、 C が当たりくじを引く確率は、

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{k-2}{n-2} + 2 \cdot \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \cdot \frac{k-1}{n-2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{k}{n-2} = \frac{k}{n}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{k}{n}$$

(1)

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta$$

と変形できるので、「すべての実数 x について $x^2 + \alpha x + \beta > 0$ である」が成り立つための α, β に関する必要十分条件は、

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{4} + \beta &> 0 \\ \therefore \alpha^2 - 4\beta &< 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha^2 - 4\beta < 0$

(2)

$a \neq 0$ のとき、 $y = -\frac{b}{a}$ となるような実数 y が存在するが、このとき、

$$ay + b = 0$$

となるので、「すべての実数 y について $ay + b < 0$ である」は成り立たない。また、 $a = 0$ のとき、

$$ay + b = b$$

となるので、「すべての実数 y について $ay + b < 0$ である」ことと $b < 0$ であることは同値となる。以上より、求める a, b に関する条件は、

$$a = 0 \text{ かつ } b < 0$$

である。

(答) $a = 0 \text{ かつ } b < 0$

(3)

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + cy + d = \left\{x + \left(2y + \frac{5}{2}\right)\right\}^2 + (c - 10)y + d - \frac{25}{4}$$

と変形できるので、「すべての実数 x, y について $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5x + cy + d > 0$ である」が成り立つための必要十分条件は、

$$\text{「すべての実数 } y \text{ について } (c - 10)y + d - \frac{25}{4} > 0 \text{ である」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「すべての実数 } y \text{ について } (10 - c)y - d + \frac{25}{4} < 0 \text{ である」}$$

$$\Leftrightarrow 10 - c = 0 \text{ かつ } -d + \frac{25}{4} < 0 \quad (\because (2))$$

$$\Leftrightarrow c = 10 \text{ かつ } d > \frac{25}{4}$$

である。

(答) $c = 10 \text{ かつ } d > \frac{25}{4}$

3

(1)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= \pm \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

と解くことができる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

(2)

3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta - k \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta - k \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \{4\cos^2 \theta - (k+3)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \text{ または } 4\cos^2 \theta - (k+3) &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta \leq 1$ であるから、与えられた方程式は、

$$4\cos^2 \theta - (k+3) = 0$$

と同値である。 $0 < 4\cos^2 \theta \leq 4$ であるから、この方程式が解をもつような正の整数 k は、

$$\begin{aligned}0 < k+3 &\leq 4 \\ \therefore k &= 1\end{aligned}$$

であり、その解は、

$$\begin{aligned}4\cos^2 \theta - 4 &= 0 \\ \therefore \theta &= 0 \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = 1, \theta = 0$$

(3)

倍角の公式、および3倍角の公式より与えられた方程式は、

$$\begin{aligned}m \cos \theta - 3 \cos 3\theta + n(1 + \cos 2\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow m \cos \theta - 3(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + n\{1 + (2\cos^2 \theta - 1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \{-12\cos^2 \theta + 2n\cos \theta + (m+9)\} &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta \leq 1$ であるから、与えられた方程式は、

$$-12\cos^2 \theta + 2n\cos \theta + (m+9) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

と同値である。ここで、 X の2次関数 $f(X)$ を、

$$f(X) = -12X^2 + 2nX + m + 9 = -12\left(X - \frac{n}{12}\right)^2 + \frac{n^2}{12} + m + 9$$

とおけば、①が解をもつことと放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わることは同値であ

る。放物線 $Y = f(X)$ は、軸: $X = \frac{n}{12}$ 、頂点 $\left(\frac{n}{12}, \frac{n^2}{12} + m + 9\right)$ の放物線であり、 m, n が正の整数

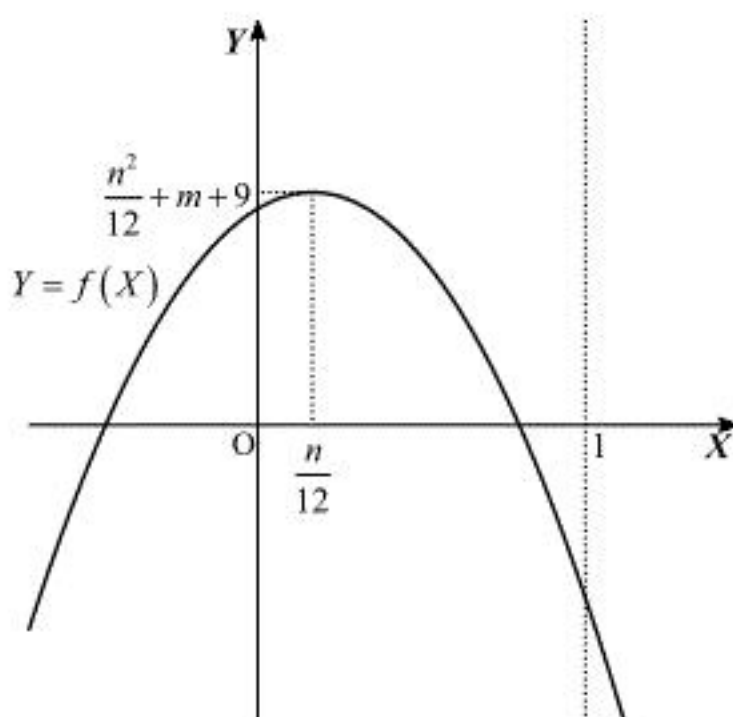
であることより、

$$\text{軸: } \frac{n}{12} > 0$$

$$\text{頂点の } Y \text{ 座標: } \frac{n^2}{12} + m + 9 > 0$$

$$f(0) = m + 9 > 0$$

が成り立つので、放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わる時以下の図のようになっている。



図より、放物線 $Y = f(X)$ が $0 < X \leq 1$ で X 軸と交わるための m, n の条件は、

$$\begin{aligned}0 < \frac{n}{12} &\leq 1 \text{ かつ } f(1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{n}{12} &\leq 1 \text{ かつ } 2n + m - 3 \leq 0 \\ \therefore (m, n) &= (1, 1)\end{aligned}$$

と求めることができる。このとき、与えられた方程式の解は、

$$\begin{aligned}-12\cos^2 \theta + 2\cos \theta + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (6\cos \theta + 5)(\cos \theta - 1) &= 0 \\ \therefore \theta &= 0 \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (m, n) = (1, 1), \theta = 0$$

(1)

正の整数 n と x ($x \neq 1$) について,

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき,

$$(\textcircled{1} \text{の左辺})=1$$

$$(\textcircled{1} \text{の右辺})=\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x}=1$$

であるから, $\textcircled{1}$ は確かに成り立つ。

[2] $n=k$ で $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定したとき

このとき,

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}+x^k &= \frac{1}{1-x}-\frac{x^k}{1-x}+x^k \\ &= \frac{1-x^k+(1-x)x^k}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{x^{k+1}}{1-x} \end{aligned}$$

より, $\textcircled{1}$ は $n=k+1$ の場合にも成り立つ。

以上[1], [2]より, 任意の正の整数 n について $\textcircled{1}$ は成り立つことが数学的帰納法により示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \right) dx \\ &= \left[-\log|1-x| \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= -\log \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n x^{k-1} \right) dx \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} \\ &= S_n \end{aligned}$$

が成り立つ。これと(2)の結果より,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) dx \\ &= \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(4)

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-x} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-x} dx \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1-x} dx &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2^n} \left[-\log|1-x| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \log 2 \end{aligned}$$

であるから, これを $\textcircled{2}$ に代入し,

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n} \log 2$$

を得る。以上より題意は示された。

(証明終)

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log 2 = 0$$

が成り立つので, (4)の不等式にはさみうちの原理を用いることで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx = 0$$

を得る。従って, (3)の式より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \right) \\ &= \log 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2$

(1)

点 A からの距離と直線 ℓ からの距離が等しい点 $P(x, y)$ を考える。点 A と点 P との距離は、

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

であり、直線 ℓ と点 P との距離は、

$$\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

であるから、点 $P(x, y)$ の軌跡である曲線 C の方程式は、

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{(x+y+2)^2}{2} \quad (\because \text{両辺ともに正})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$$

(2)

曲線 C と x 軸の共有点の x 座標は、曲線 C の方程式において $y=0$ とすることで、

$$x^2 - 8x = 0$$

$$\therefore x = 0, 8$$

と求めることができる。従って、曲線 C と x 軸の共有点の座標は、

$$(0, 0), (8, 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (0, 0), (8, 0)$$

(3)

曲線 C の方程式を y について解くと、

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2(x+4)y + (x^2 - 8x) = 0$$

$$\therefore y = x+4 \pm 4\sqrt{x+1} \quad (x > -1)$$

となる。 $0 \leq x \leq 8$ において、

$$y = x+4+4\sqrt{x+1} > 0$$

$$y = x+4-4\sqrt{x+1} = \frac{(x+4+4\sqrt{x+1})(x+4-4\sqrt{x+1})}{x+4+4\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-8x}{x+4+4\sqrt{x+1}} \leq 0$$

が成り立つので、求める面積は、 $0 \leq x \leq 8$ において x 軸と曲線 $y = x+4-4\sqrt{x+1}$ に囲まれる部分の面積である。従って、

$$\begin{aligned} \int_0^8 \left\{ -(x+4-4\sqrt{x+1}) \right\} dx &= \left[-\frac{1}{2}(x+4)^2 + \frac{8}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 12^2 + \frac{8}{3} \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{8}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{16}{3}$$