

(1)

1000 から 2017 までの整数のうち 3 で割り切れるものは,

$$1002, 1005, \dots, 2016$$

であり,

$$1002 = 3 \cdot 334 \quad \text{かつ} \quad 2016 = 3 \cdot 672$$

であるから, $672 - 334 + 1 = 339$ 個ある。また, 1000 から 2017 までの整数のうち 4 で割り切れるものは,

$$1000, 1004, \dots, 2016$$

であり,

$$1000 = 4 \cdot 250 \quad \text{かつ} \quad 2016 = 4 \cdot 504$$

であるから, $504 - 250 + 1 = 255$ 個ある。さらに, 1000 から 2017 までの整数のうち 12 で割り切れるものは,

$$1008, 1020, \dots, 2016$$

であり,

$$1008 = 12 \cdot 84 \quad \text{かつ} \quad 2016 = 12 \cdot 168$$

であるから, $168 - 84 + 1 = 85$ 個ある。したがって, 求める個数は,

$$339 + 255 - 85 = 509 \text{ (個)}$$

である。

(答) 509 個

(2)

千の位の数字によって場合分けを行う。

[1] 千の位が 1 であるとき

1 を除く 1 桁の整数を k ($= 0, 2, 3, \dots, 9$) とすると, 条件を満たす整数は百, 十, 一の位が 1 と k のみからなる整数である。ここで, 1111 は除くから百, 十, 一の位のとり方は,

$$2^3 - 1 = 7 \text{ (通り)}$$

である。いま, k のとり方は 9 通りであるから, 条件を満たす整数の個数は,

$$7 \cdot 9 = 63 \text{ (個)}$$

である。

[2] 千の位が 2 であるとき

このとき, 条件を満たす整数は,

$$2000, 2002$$

の 2 個のみである。

以上, [1], [2] より求める個数は,

$$63 + 2 = 65 \text{ (個)}$$

である。

(答) 65 個

(3)

千の位の数字によって場合分けを行う。

[1] 千の位が 1 であるとき

百, 十, 一の位は, 1 を除いた互いに異なる 3 つの整数を並べたものであるから, 条件を満たす整数の個数は,

$${}_9C_3 \cdot 3! = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ (個)}$$

である。

[2] 千の位が 2 であるとき

このとき, 条件を満たす整数は,

$$2013, 2014, 2015, 2016, 2017$$

の 5 個のみである。

以上, [1], [2] より求める個数は,

$$504 + 5 = 509 \text{ (個)}$$

である。

(答) 509 個

(1)

円 C の方程式は、

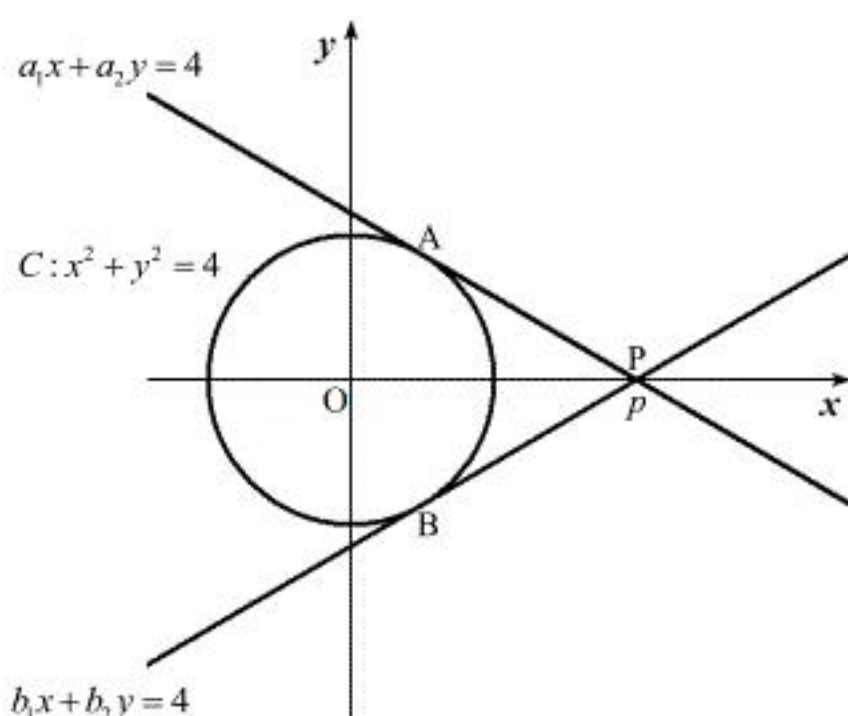
$$x^2 + y^2 = 4$$

である。円の接線の公式より、点 A および点 B における接線の方程式はそれぞれ、

$$a_1x + a_2y = 4$$

$$b_1x + b_2y = 4$$

となる。以下に円 C 、点 P 、点 A および点 B とその接線を図示する。



上図より、図形全体が x 軸に関して対称であるから、点 A と点 B も x 軸に関して対称である。

ここで、点 A における接線は点 $P(p, 0)$ を通るから、

$$a_1 \cdot p + a_2 \cdot 0 = 4$$

$$\therefore a_1 = \frac{4}{p} \quad (\because p > 2)$$

と得られる。また、点 A は円 C 上にあるから、図より $a_2 > 0$ であることに注意すると、

$$a_1^2 + a_2^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{p}\right)^2 + a_2^2 = 4$$

$$\therefore a_2 = \frac{2\sqrt{p^2-4}}{p} \quad (a_2 > 0, p > 2)$$

と得られる。点 A と点 B は x 軸に関して対称であるから、

$$b_1 = \frac{4}{p}, b_2 = -\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}$$

となる。したがって、点 A および点 B の座標は、

$$A\left(\frac{4}{p}, \frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right), B\left(\frac{4}{p}, -\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad A\left(\frac{4}{p}, \frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right), B\left(\frac{4}{p}, -\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right)$$

(2)

重心 G の座標を (X, Y) とおくと、(1)の結果より、

$$X = \frac{\frac{4}{p} + \frac{4}{p} + p}{3} = \frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right)$$

$$Y = \frac{\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p} + \left(-\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right) + 0}{3} = 0$$

と求められる。したがって、 $G\left(\frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right), 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad G\left(\frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right), 0\right)$$

(3)

点 G が円 C 上にあるとき、(2)の結果より p の値は、

$$\left\{\frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right)\right\}^2 + 0^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right) = 2 \quad (\because p + \frac{8}{p} > 2)$$

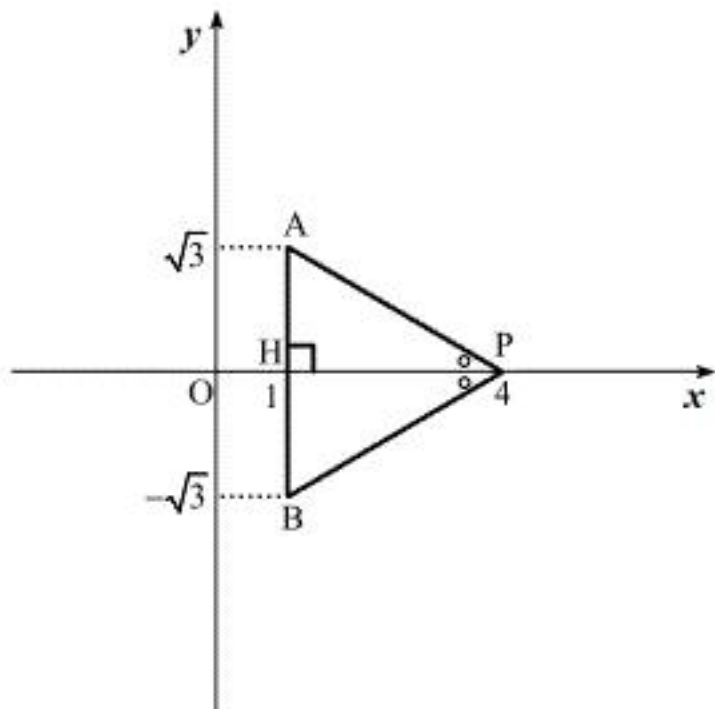
$$\Leftrightarrow p^2 - 6p + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p-2)(p-4) = 0$$

$$\therefore p = 4 \quad (\because p > 2)$$

となる。このとき、 $A(1, \sqrt{3})$ 、 $B(1, -\sqrt{3})$ であり点 H を $H(1, 0)$ とする。以下に、点 P 、点 H 、点

A および点 B を図示する。



上図より、 $\triangle AHP$ は、

$$AH : PA : HP = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

を満たす直角三角形であるから、 $\angle APH = 30^\circ$ である。したがって、図形は x 軸に関して対称

であるから、 $\angle APB = 60^\circ$ である。

$$(\text{答}) \quad \angle APB = 60^\circ$$

(4)

(2)の結果より、 $d = \frac{1}{3}\left(p + \frac{8}{p}\right)$ である。したがって、 $p > 2$ における $p + \frac{8}{p}$ の最小値を求めれば

よい。いま、 $p > 0$ 、 $\frac{8}{p} > 0$ であるから、相加相乗平均の不等式より、

$$p + \frac{8}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{8}{p}} = 4\sqrt{2}$$

となる。等号成立条件は、

$$p = \frac{8}{p}$$

$$\therefore p = 2\sqrt{2} \quad (\because p > 0)$$

であり、これは $p > 2$ を満たすから、 d は $p = 2\sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad d \text{ の最小値 : } \frac{4\sqrt{2}}{3}, p \text{ の値 : } 2\sqrt{2}$$

3

(1)

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ であることに注意すると、加法定理より、

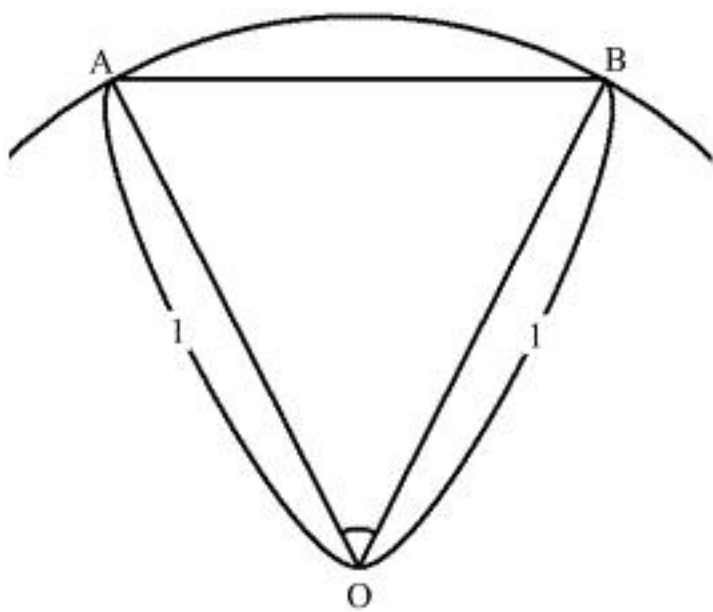
$$\begin{aligned} a_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^2}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

が成り立つことが示せた。

(証明終)

(2)

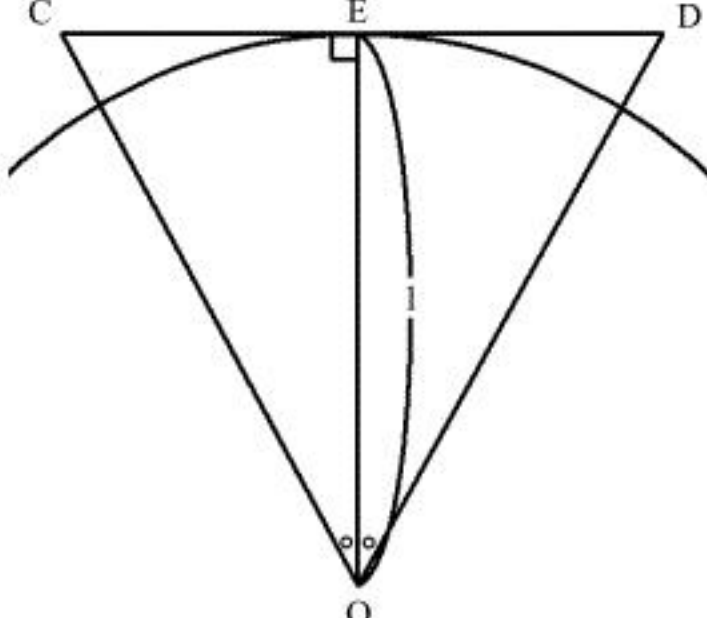
まず、 I_n について考える。円の中心を O 、内接する正 n 角形の隣り合う 2 つの頂点を A, B とし、以下に図示する。



$\triangle OAB$ は正 n 角形を n 等分したものだから、 $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$ である。したがって、 I_n の値は、

$$I_n = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \right) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

である。次に、 E_n について考える。外接する正 n 角形の隣り合う 2 つの頂点を C, D 、辺 CD と円の接点を E として以下に図示する。



$\triangle OCD$ は正 n 角形を n 等分したものだから、 $\angle COD = \frac{2\pi}{n}$ である。ここで、上図より、

$$\angle COE = \frac{1}{2} \angle COD = \frac{\pi}{n}$$

であり、

$$CE = OE \tan \angle COE = \tan \frac{\pi}{n}$$

であるから、 E_n の値は、

$$E_n = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot CD \right) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2CE \right) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \tan \frac{\pi}{n} \right) = n \tan \frac{\pi}{n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad I_n = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}, \quad E_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

(3)

ここでは、 $\frac{\pi}{3 \cdot 2^m} = A$ とおく ($\cos A = a_m$)。 m は正の整数であるから、 $0 < A \leq \frac{\pi}{6}$ を満たす。したがって、 $\sin A > 0$ 、 $\tan A > 0$ が成り立つから、三角比の性質より、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - a_m^2} \\ \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right) = \sqrt{1 - a_m^2}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right) = \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m}$$

(4)

まず、 $\pi > I_n$ について考える。 n が整数であることを考慮して、 $n = 3 \cdot 2^{m+1}$ とおくと、(2) および (3) の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} \pi &> I_{3 \cdot 2^{m+1}} \\ &\Leftrightarrow \pi > \frac{3 \cdot 2^{m+1}}{2} \sin \frac{2\pi}{3 \cdot 2^{m+1}} \\ &\Leftrightarrow \pi > 3 \cdot 2^m \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right) \\ &\Leftrightarrow \pi > 3 \cdot 2^m \sqrt{1 - a_m^2} \end{aligned}$$

と得られる。次に、 $\pi < E_n$ について考える。 n が整数であることを考慮して、 $n = 3 \cdot 2^m$ とおくと、(2) および (3) の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} \pi &< E_{3 \cdot 2^m} \\ &\Leftrightarrow \pi < 3 \cdot 2^m \tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right) \\ &\Leftrightarrow \pi < 3 \cdot 2^m \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m} \end{aligned}$$

と得られる。以上、2 式より、

$$3 \cdot 2^m \sqrt{1 - a_m^2} < \pi < 3 \cdot 2^m \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m}$$

が成り立つことが示せた。

(証明終)

(5)

(4) で得られた不等式において、 $m = 2$ とすると、(1) より $a_m = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^2 \sqrt{1 - a_2^2} &< \pi < 3 \cdot 2^2 \frac{\sqrt{1 - a_2^2}}{a_2} \\ &\Leftrightarrow 12 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} < \pi < 12 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} < \pi < 12\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \\ &\Leftrightarrow 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < \pi < 12(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &\Leftrightarrow 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < \pi < 12(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

が成り立つことが示せた。

(証明終)

(1)

曲線 C の方程式を a について整理すると、

$$a(x^2 - 4x) + x^3 - 4x^2 + 2x - 2 - y = 0$$

となるから、この式が a の値に関係なく成り立つとき、 x, y に関する条件、

$$\begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 2 - y = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと $(x, y) = (0, -2), (4, 6)$ となる。すなわち曲線 C は a の値に関係なくこの 2 点を必ず通る。したがって、点 A および点 B の座標は $(0, -2), (4, 6)$ である。

(答) $(0, -2), (4, 6)$

(2)

直線 AB の式は、

$$y - 6 = \frac{-2 - 6}{0 - 4}(x - 4) \\ \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

である。曲線 C と直線 AB の交点の x 座標は、それぞれの式から y を消去することで、

$$\begin{aligned} x^3 + (a - 4)x^2 + (-4a + 2)x - 2 &= 2x - 2 \\ \Leftrightarrow x\{x^2 + (a - 4)x - 4a\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 4)(x + a) &= 0 \\ \therefore x = 0, 4, -a \end{aligned}$$

と求められる。ここで、(1)より $x = 0, 4$ における交点は点 A および点 B であるから、 $x = -a$ における交点が線分 AB 上にあればよい。したがって、求める条件は、

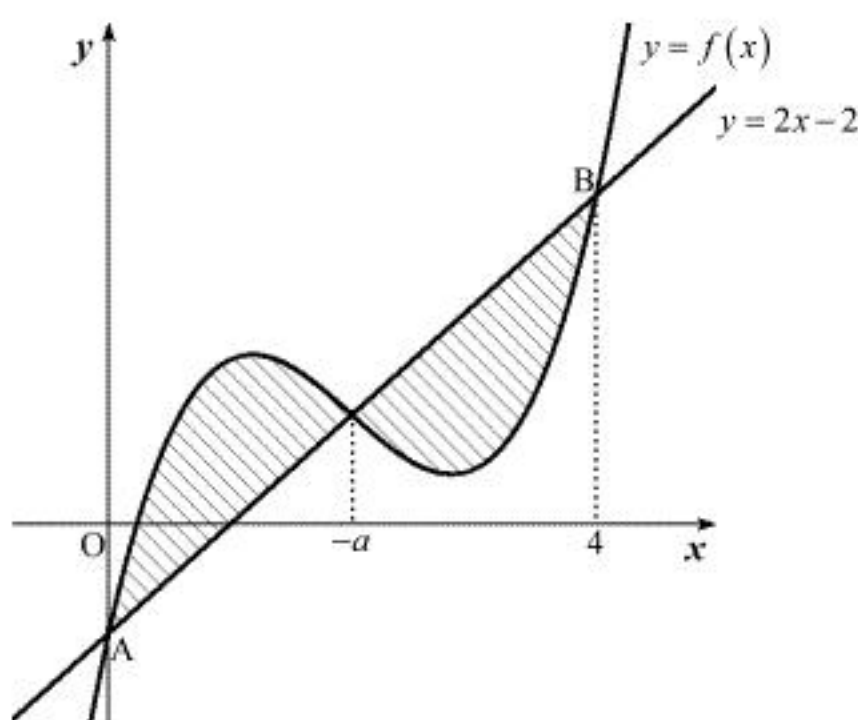
$$\begin{aligned} 0 < -a < 4 \\ \therefore -4 < a < 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $-4 < a < 0$

(3)

いま、 $A(0, -2), B(4, 6)$ とし、 $f(x) = x^3 + (a - 4)x^2 + (-4a + 2)x - 2$ とおく。以下に求める面積を斜線部で示す。



上図より、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-a} \{f(x) - (2x - 2)\} dx + \int_{-a}^4 \{(2x - 2) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^{-a} \{x^3 + (a - 4)x^2 - 4ax\} dx - \int_{-a}^4 \{x^3 + (a - 4)x^2 - 4ax\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{(a - 4)}{3}x^3 - 2ax^2 \right]_0^{-a} - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{(a - 4)}{3}x^3 - 2ax^2 \right]_{-a}^4 \\ &= 2 \cdot \left\{ \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3(a - 4) - 2a^3 \right\} - \left\{ 64 + \frac{64}{3}(a - 4) - 32a \right\} \\ &= -\frac{1}{6}a^4 - \frac{4}{3}a^3 + \frac{32}{3}a + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) S = -\frac{1}{6}a^4 - \frac{4}{3}a^3 + \frac{32}{3}a + \frac{64}{3}$$

(4)

$S = g(a)$ とおくと、導関数 $g'(a)$ は、

$$\begin{aligned} g'(a) &= -\frac{2}{3}a^3 - 4a^2 + \frac{32}{3} \\ &= -\frac{2}{3}(a^3 + 6a^2 - 16) \\ &= -\frac{2}{3}(a + 2)(a^2 + 4a - 8) \\ &= -\frac{2}{3}(a + 2)\{a - (-2 + 2\sqrt{3})\}\{a - (-2 - 2\sqrt{3})\} \end{aligned}$$

であるから、 $g'(a) = 0$ を満たす a は $-4 < a < 0$ の範囲で、 $a = -2$ である。以下に増減表を示す。

a	-4	...	-2	...	0
$g'(a)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$g(a)$	$\times$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$\times$

増減表より、 $g(a)$ すなわち S の最小値は 8 で、このとき $a = -2$ である。

(答) S の最小値：8、 a の値：-2

(1)

$a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ であり、 $b_n = R(a_n)$ であるから、 a_n ($n=1, 2, \dots, 8$)を3で割った余り b_n を表に示すと以下になる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	2	3	7	22	155	3411
b_n	1	1	2	0	1	1	2	0

上表より、 b_n ($n=1, 2, \dots, 8$)は求められた。

(答) 前述

(2)

q を3で割った商を r とすると、 $q = 3r + R(q)$ と表せる。したがって、

$$3p + q = 3(p + r) + R(q)$$

であるから、 $3p + q$ を3で割った余りは $R(q)$ に等しい。すなわち、

$$R(3p + q) = R(q)$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

a_n を3で割った商を A_n とすると、 $a_n = 3A_n + b_n$ と表せるから、 $R(a_{n+1}a_n + 1)$ は、

$$\begin{aligned} R(a_{n+1}a_n + 1) &= R((3A_{n+1} + b_{n+1})(3A_n + b_n) + 1) \\ &= R(9A_{n+1}A_n + 3(A_{n+1}b_n + A_nb_{n+1}) + b_{n+1}b_n + 1) \\ &= R(3(3A_{n+1}A_n + A_{n+1}b_n + A_nb_{n+1}) + (b_{n+1}b_n + 1)) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3A_{n+1}A_n + A_{n+1}b_n + A_nb_{n+1}$ と $b_{n+1}b_n + 1$ はともに0以上の整数であるから、(2)の式において、

$$p = 3A_{n+1}A_n + A_{n+1}b_n + A_nb_{n+1}$$

$$q = b_{n+1}b_n + 1$$

とおくと、

$$R(3(3A_{n+1}A_n + A_{n+1}b_n + A_nb_{n+1}) + (b_{n+1}b_n + 1)) = R(b_{n+1}b_n + 1)$$

となる。以上より、

$$R(a_{n+1}a_n + 1) = R(b_{n+1}b_n + 1)$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

(1)より、任意の自然数 l に対して

$$b_{4l-3} = 1, b_{4l-2} = 1, b_{4l-1} = 2, b_{4l} = 0$$

が成り立つと予測できる。自然数 l を固定したときの上の式を(A)とし、すべての自然数 l に対して(A)が成り立つことを数学的帰納法で示す。

[1] $l=1$ のとき

(1)より、 $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 0$ であるから、(A)は成り立つ。

[2] $l=m$ (m は自然数)のとき

(A)が成り立つ、すなわち $b_{4m-3} = 1, b_{4m-2} = 1, b_{4m-1} = 2, b_{4m} = 0$ であると仮定する。ここで、 $l=m+1$ のときも(A)が成り立つ、すなわち $b_{4m+1} = 1, b_{4m+2} = 1, b_{4m+3} = 2, b_{4m+4} = 0$ であることを示せばよい。問題文と(3)より、

$$\begin{aligned} R(a_{n+1}a_n + 1) &= R(b_{n+1}b_n + 1) \\ \Leftrightarrow R(a_{n+2}) &= R(b_{n+1}b_n + 1) \\ \Leftrightarrow b_{n+2} &= R(b_{n+1}b_n + 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} b_{4m+1} &= R(b_{4m}b_{4m-1} + 1) = R(0 \cdot 2 + 1) = 1 \\ b_{4m+2} &= R(b_{4m+1}b_{4m} + 1) = R(1 \cdot 0 + 1) = 1 \\ b_{4m+3} &= R(b_{4m+2}b_{4m+1} + 1) = R(1 \cdot 1 + 1) = 2 \\ b_{4m+4} &= R(b_{4m+3}b_{4m+2} + 1) = R(2 \cdot 1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2]よりすべての自然数 l に対して(A)が成り立つ。したがって、 $b_{n+4} = b_n$ が成り立つ。

(証明終)

(5)

(4)の結果を考慮して、 $n = 4l-3, 4l-2, 4l-1, 4l$ についてそれぞれ s_n を考える。(4)の結果を利用し、 l を用いて s_n を表すと、

$$s_{4l-3} = b_1 + b_2 + \dots + b_{4l-4} + b_{4l-3} = (1+1+2+0) \cdot (l-1) + b_{4l-3} = 4l-3$$

$$\begin{aligned} s_{4l-2} &= b_1 + b_2 + \dots + b_{4l-4} + b_{4l-3} + b_{4l-2} \\ &= (1+1+2+0) \cdot (l-1) + b_{4l-3} + b_{4l-2} \\ &= 4l-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{4l-1} &= b_1 + b_2 + \dots + b_{4l-4} + b_{4l-3} + b_{4l-2} + b_{4l-1} \\ &= (1+1+2+0) \cdot (l-1) + b_{4l-3} + b_{4l-2} + b_{4l-1} \\ &= 4l \end{aligned}$$

$$s_{4l} = b_1 + b_2 + \dots + b_{4l} = (1+1+2+0) \cdot l = 4l$$

となる。したがって、一般項 s_n を n で表すと、

$$s_n = \begin{cases} n & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 0, 1, 2 \text{ のとき}) \\ n+1 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) 前述