

(1)

$S(n) = \sum_{k=1}^{6n} k^2$ を計算すると,

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{6n} k^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6n \cdot (6n+1) \cdot (2 \cdot 6n+1) \\ &= n(6n+1)(12n+1) \end{aligned}$$

と導ける。

(答) $n(6n+1)(12n+1)$

(2)

(1)の結果より, $S(n) = n(6n+1)(12n+1)$ であるから,

$$\begin{aligned} S(m) - S(n) &= m(6m+1)(12m+1) - n(6n+1)(12n+1) \\ &= (72m^3 + 18m^2 + m) - (72n^3 + 18n^2 + n) \\ &= 72(m^3 - n^3) + 18(m^2 - n^2) + (m - n) \\ &= 72(m-n)(m^2 + mn + n^2) + 18(m-n)(m+n) + (m-n) \\ &= (m-n)\{72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1\} \end{aligned}$$

と変形できる。また $m > n+1$ より, $m-n \neq 0$ であるから,

$$T(m, n) = 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1$$

となる。

(答) $72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1$

(3)

$S(m) - S(n) = 2018$ について, いま m, n は $m > n+1$ を満たす自然数であるから, $m > 2, n \geq 1$ より,

$$T(m, n) = 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1 > 72(2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) + 18(2+1) + 1 = 559$$

である。したがって, 1009 が素数であることから,

$$(m-n)T(m, n) = 2 \cdot 1009$$

$$\Leftrightarrow m-n=2 \text{ かつ } T(m, n)=1009 \quad (\because T(m, n) > 559)$$

となる。このとき,

$$T(m, n) = 1009$$

$$\Leftrightarrow 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1 = 1009$$

$$\Leftrightarrow 72\{(m-n)^2 + 3mn\} + 18(m+n) - 1008 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\{(m-n)^2 + 3mn\} + (m+n) - 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\{2^2 + 3(n+2)n\} + \{(n+2) + n\} - 56 = 0 \quad (\because m-n=2)$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 + 13n - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(6n+19) = 0$$

$$\Leftrightarrow n=1, -\frac{19}{6}$$

である。したがって, n は自然数より, $n=1$ である。また m の値は,

$$m = n+2 = 3, n=1$$

となる。

(答) $m=3, n=1$

2

(1)

$\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{BC} = (x-3, y-\sqrt{3}, z)$ であるから,

$$\begin{aligned} t &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (2, 0, 0) \cdot (x-3, y-\sqrt{3}, z) \\ &= 2(x-3) \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = 2(x-3)$

(2)

$\overrightarrow{AB} = (1, \sqrt{3}, 0)$ となるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 2 \\ \Leftrightarrow (1, \sqrt{3}, 0) \cdot (x-3, y-\sqrt{3}, z) &= 2 \\ \Leftrightarrow (x-3) + \sqrt{3}(y-\sqrt{3}) &= 2 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y &= 8 \end{aligned}$$

が成立する。また, $|\overrightarrow{BC}| = 2$ から,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

が成立する。

(答) $x + \sqrt{3}y = 8, (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 4$

(3)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ から,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 2 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC} &= 2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 + t \quad (\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = t) \end{aligned}$$

と導ける。

(答) $2+t$

(4)

(2)の結果より, $x + \sqrt{3}y = 8$ かつ $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 4$ が成立する。このとき $x + \sqrt{3}y = 8$ より,

$x + \sqrt{3}y = 8 \Leftrightarrow y = \frac{8-x}{\sqrt{3}}$ となるため, これを利用して $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 4$ を変形すると,

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\frac{8-x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)^2 + z^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 3(x-3)^2 + (8-x-3)^2 + 3z^2 &= 12 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 40 + 3z^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-5) &= -\frac{3}{4}z^2 \end{aligned}$$

となる。よって問題文の条件を満たすための x の範囲は

$$\begin{aligned} (x-2)(x-5) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \leq x &\leq 5 \end{aligned}$$

となる。また, (1)の結果より, $t = 2(x-3)$ が成立するので,

$$\begin{aligned} 2 \leq x &\leq 5 \\ \Leftrightarrow -2 \leq 2(x-3) &\leq 4 \\ \therefore -2 \leq t &\leq 4 \end{aligned}$$

となる。よって, $-2 \leq t \leq 4$ が成立する。

(証明終)

また, $t = 4$ のとき, $2(x-3) = 4$ より $x = 5$ である。このとき,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 8 \\ (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sqrt{3}y = 8-5 \\ (5-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = \sqrt{3} \\ 4 + (\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + z^2 = 4 \end{cases} \\ \therefore (y, z) &= (\sqrt{3}, 0) \end{aligned}$$

となる。したがって, $t = 4$ のときの点 C の座標は $(5, \sqrt{3}, 0)$ である。

(答) $(5, \sqrt{3}, 0)$

(5)

(3)の結果を用いて,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= \left\{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2\right\} + 2(2+t) + 2^2 \\ &= 2t + 20 \end{aligned}$$

と導ける。(4)より, $-2 \leq t \leq 4$ であるから,

$$|\overrightarrow{OC}|^2 \leq 2 \cdot 4 + 20 = 28$$

となる。ここで, 等号が成立するのは, $t = 4$ のとき, すなわち(4)の結果より点 C の座標が

$(5, \sqrt{3}, 0)$ のときであり,

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

となる。よって, $|\overrightarrow{OC}|$ の最大値は $2\sqrt{7}$ である。

(答) $2\sqrt{7}$

3

(1)

$p = r \cos \beta, q = r \sin \beta$ のとき, $r \geq 0$ を満たす実数 r について,

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= r^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = r^2 \\ \therefore r &= \sqrt{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

が成立する。

$$(\text{答}) \quad r = \sqrt{p^2 + q^2}$$

また, 三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned} r \sin(\alpha + \beta) &= r(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= r \cos \beta \cdot \sin \alpha + r \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ &= p \sin \alpha + q \cos \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

三角関数の2倍角の公式および合成の公式を用いると,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta \\ &= a \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta + b \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta + \frac{a+b}{2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \sin(2\theta + \alpha) + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。ただし, α は

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}, \sin \alpha = \frac{a-b}{2\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}$$

を満たす実数である。いま, θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を満たすので,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\leq f(\theta) \leq \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

が成立する。よって, $f(\theta)$ の最小値 m , 最大値 M はそれぞれ

$$\begin{aligned} m &= -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \\ M &= \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}, M = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$$

(3)

(2)の結果より, $f(\theta)$ の最小値は $m = -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$ である。つまりすべての θ について

$f(\theta) \geq 0$ となることは, $m \geq 0$ となることと同値である。ゆえに,

$$\begin{aligned} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \quad (>0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{a+b}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow ab &\geq 1 \quad \text{かつ} \quad a+b > 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $ab \geq 1$ のとき, $ab > 0$ であるため, a, b はいずれも正となるか, いずれも負となるかのいずれかである。また, $a+b > 0$ より $a > 0, b > 0$ となる。逆に, $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき, $a+b > 0$ は成り立つ。したがって, 求める条件は,

$$ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0$$

(4)

(2)の結果より, $f(\theta)$ の最大値は $M = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$ である。つまりすべての θ について

$f(\theta) \leq 0$ となることは, $M \leq 0$ となることと同値である。ゆえに,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} &\leq -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \quad (<0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{a+b}{2} < 0 \\ \Leftrightarrow ab &\geq 1 \quad \text{かつ} \quad a+b < 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $ab \geq 1$ のとき, $ab > 0$ であるため, a, b はいずれも正となるか, いずれも負となるかのいずれかである。また, $a+b < 0$ より $a < 0, b < 0$ となる。逆に, $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき, $a+b < 0$ は成り立つ。したがって, 求める条件は,

$$ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0$$

(5)

$f(\theta)$ が正の値と負の値どちらもとることは, $f(\theta)$ の最小値 m , 最大値 M が

$$m < 0 < M$$

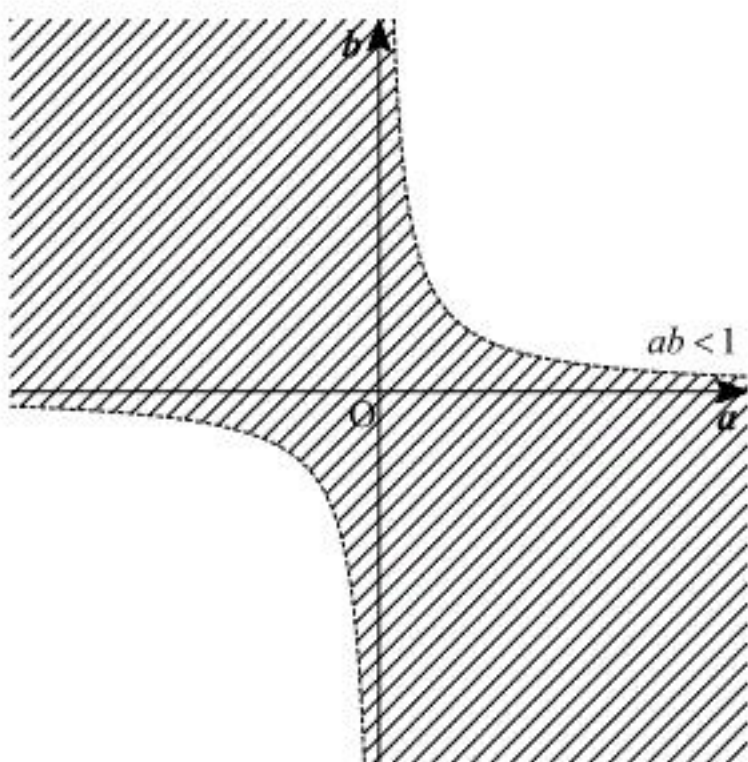
を満たすことと同値である。これは,

$$\begin{aligned} m &< 0 < M \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &< 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &< 0 \quad \text{かつ} \quad 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立することと同値である。したがって, ①より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} < 0 \\ 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} < \frac{a+b}{2} \\ \frac{a+b}{2} < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{a+b}{2} \right| < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 4 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow ab < 1 \end{aligned}$$

となる。これより, 条件を満たす点 (a, b) 全体の集合は下の図の斜線部分のようになる。ただし, 境界線を除く。



$$(\text{答}) \quad \text{条件: } ab < 1, \text{ 領域: 上図(ただし境界は含まない。)}$$

(1)

以下、先頭から並んでいる人が順に X, Y, Z であるとき、 (X, Y, Z) と表記するものとする。

いま操作の開始前は (A, B, C) であり、操作のルールにより、1 回目の操作後は、 $\frac{1}{6}$ の確率で

(B, A, C) に、 $\frac{1}{6}$ の確率で (A, C, B) 、 $\frac{2}{3}$ の確率で (A, B, C) となる。これより、1 回目の操作後

に A が先頭にいる確率 p_1 、2 番目にいる確率 q_1 はそれぞれ、

$$p_1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$q_1 = \frac{1}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{5}{6}, q_1 = \frac{1}{6}$$

(2)

$n+1$ 回さいころを投げた後に A が先頭にいる状態について、 n 回さいころを投げた後の A の状態に関して場合分けして考えると、以下の表のようになる。

n 回投げた後の A の位置	左の状態に なる確率	$n+1$ 回投げた後に 先頭になる条件	左の状態になる 条件付き確率
先頭	p_n	1 以外の目が出る	$\frac{5}{6}$
2 番目	q_n	1 が出る	$\frac{1}{6}$
3 番目	$1 - p_n - q_n$	なし	0

したがって、数列 $\{p_n\}$ に関して求める漸化式は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \cdot \frac{5}{6} + q_n \cdot \frac{1}{6} + (1 - p_n - q_n) \cdot 0 \\ &= \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \end{aligned}$$

となる。また、 $n+1$ 回さいころを投げた後に A が 2 番目にいる状態について、同様にして

n 回投げた後の A の位置	その状態に なる確率	$n+1$ 回投げた後に 2 番目になる条件	その状態になる 条件付き確率
先頭	p_n	1 の目が出る	$\frac{1}{6}$
2 番目	q_n	1, 2 以外の目が出る	$\frac{2}{3}$
3 番目	$1 - p_n - q_n$	2 の目が出る	$\frac{1}{6}$

となるから、数列 $\{q_n\}$ に関して求める漸化式は

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_n \cdot \frac{1}{6} + q_n \cdot \frac{2}{3} + (1 - p_n - q_n) \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6}$$

(3)

(1), (2) の結果より、 $q_1 = \frac{1}{6}$ 、 $q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6}$ ($n \geq 1$) であるから、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow q_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \left(q_n - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

であり、数列 $\left\{ q_n - \frac{1}{3} \right\}$ は、初項 $q_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。したがって、 q_n は

$$\begin{aligned} q_n - \frac{1}{3} &= \left(-\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow q_n &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

(4)

(2), (3) の結果より、 p_{n+1} と p_n について、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \\ &= \frac{5}{6} p_n + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

と導ける。ここで、 $a_n = 2^n \left(p_n - \frac{1}{3} \right)$ とおくと、 $p_n - \frac{1}{3} = \frac{a_n}{2^n} \Leftrightarrow p_n = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3}$ であるから、上式に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{3} &= \frac{5}{6} \left(\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{18} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{1}{3} 2^{n+1} &= \frac{5}{3} \left(a_n + \frac{2^n}{3} \right) + \frac{1}{9} \{ 2^n - 1 \} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{5}{3} a_n - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

と導ける。したがって、 a_{n+1} と a_n の関係式は、 $a_{n+1} = \frac{5}{3} a_n - \frac{1}{9}$ である。また、これより、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{5}{3} a_n - \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{6} &= \frac{5}{3} \left(a_n - \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

となるので、数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{6} \right\}$ は、初項 $2 \left(p_1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 、公比 $\frac{5}{3}$ の等比数列である。したがって、 a_n は

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{6} &= \frac{5}{6} \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} \right)^n \end{aligned}$$

となる。よって、 p_n は $p_n = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3}$ より、

$$p_n = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} \right)^n + \frac{1}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{関係式: } a_{n+1} = \frac{5}{3} a_n - \frac{1}{9}, \quad p_n : \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} \right)^n + \frac{1}{3}$$

(1)

$S_n = a^{3n+3} - 1, T_n = (a-1)(a^2+a+1) \sum_{k=1}^{n+1} a^{3k-3}$ であるから, S_1, T_1 はそれぞれ

$$\begin{aligned} S_1 &= a^{3+3} - 1 = a^6 - 1 \\ T_1 &= (a-1)(a^2+a+1) \sum_{k=1}^2 a^{3k-3} \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6 - 1 \end{aligned}$$

となる。よって, $S_1 = T_1$ である。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (a^{3(n+1)+3} - 1) - (a^{3n+3} - 1) \\ &= a^{3n+3} (a^3 - 1) \\ T_{n+1} - T_n &= (a-1)(a^2+a+1) \left(\sum_{k=1}^{n+2} a^{3k-3} - \sum_{k=1}^{n+1} a^{3k-3} \right) \\ &= (a^3-1) \left(a^{3n+3} + \sum_{k=1}^{n+1} a^{3k-3} - \sum_{k=1}^{n+1} a^{3k-3} \right) \\ &= a^{3n+3} (a^3 - 1) \end{aligned}$$

であるので, すべての n に対して

$$S_{n+1} - S_n = T_{n+1} - T_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。また, これより, すべての n に対して

$$S_n = T_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)より成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

②が成立すると仮定する。このとき, $S_k = T_k$ が成り立ち, $n=k$ について①式が成立するので,

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= T_{k+1} - T_k \\ \Leftrightarrow S_{k+1} &= T_{k+1} \quad (\because S_k = T_k) \end{aligned}$$

となる。したがって, $n=k+1$ のときも成立する。

以上, [1], [2]より, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について, $S_n = T_n$ が成立することが示された。

(証明終)

(3)

$2^{15} - 1 = 2^{3 \cdot 4 + 3} - 1$ であるから, これは, $S_n = a^{3n+3} - 1$ に $a=2, n=4$ を代入したものである。ここで, (2)で示したように $S_n = T_n$ が成立するので,

$$\begin{aligned} 2^{15} - 1 &= (2-1)(2^2+2+1) \sum_{k=1}^{4+1} 2^{3k-3} \\ &= 7 \cdot \sum_{k=1}^5 2^{3k-3} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで, $\sum_{k=1}^5 2^{3k-3}$ は整数であるから, $2^{15} - 1$ は7の倍数である。よって, $2^{15} - 1$ を7で割った余りは0である。

(答) 0

(4)

(2)の結果を用いて, $a=5$ として 5^{2018} を変形すると,

$$\begin{aligned} 5^{2018} &= 5^2 (5^{3 \cdot 671 + 3}) \\ &= 25 (S_{671} + 1) \\ &= 25 (T_{671} + 1) \\ &= 25 \left\{ (5-1)(5^2+5+1) \sum_{k=1}^{671+1} 5^{3k-3} + 1 \right\} \\ &= 31 \cdot 100 \sum_{k=1}^{672} 5^{3k-3} + 25 \end{aligned}$$

となる。ここで, $31 \cdot 100 \sum_{k=1}^{672} 5^{3k-3}$ は31の倍数であるから, 5^{2018} を31で割った余りは25である。

(答) 25