

(1)

$S(n) = \sum_{k=1}^{6n} k^2$ を計算すると,

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{6n} k^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 6n \cdot (6n+1) \cdot (2 \cdot 6n+1) \\ &= n(6n+1)(12n+1) \end{aligned}$$

と導ける。

(答) $n(6n+1)(12n+1)$

(2)

(1)の結果より, $S(n) = n(6n+1)(12n+1)$ であるから,

$$\begin{aligned} S(m) - S(n) &= m(6m+1)(12m+1) - n(6n+1)(12n+1) \\ &= (72m^3 + 18m^2 + m) - (72n^3 + 18n^2 + n) \\ &= 72(m^3 - n^3) + 18(m^2 - n^2) + (m - n) \\ &= 72(m-n)(m^2 + mn + n^2) + 18(m-n)(m+n) + (m-n) \\ &= (m-n) \{ 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1 \} \end{aligned}$$

と変形できる。また $m > n+1$ より, $m-n \neq 0$ であるから,

$$T(m, n) = 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1$$

となる。

(答) $72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1$

(3)

$S(m) - S(n) = 2018$ について, いま m, n は $m > n+1$ を満たす自然数であるから, $m > 2, n \geq 1$ より,

$$T(m, n) = 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1 > 72(2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) + 18(2+1) + 1 = 559$$

である。したがって, 1009 が素数であることから,

$$(m-n)T(m, n) = 2 \cdot 1009$$

$$\Leftrightarrow m-n=2 \text{ かつ } T(m, n)=1009 \quad (\because T(m, n) > 559)$$

となる。このとき,

$$T(m, n) = 1009$$

$$\Leftrightarrow 72(m^2 + mn + n^2) + 18(m+n) + 1 = 1009$$

$$\Leftrightarrow 72\{(m-n)^2 + 3mn\} + 18(m+n) - 1008 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\{(m-n)^2 + 3mn\} + (m+n) - 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\{2^2 + 3(n+2)n\} + \{(n+2)+n\} - 56 = 0 \quad (\because m-n=2)$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 + 13n - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(6n+19) = 0$$

$$\Leftrightarrow n=1, -\frac{19}{6}$$

である。したがって, n は自然数より, $n=1$ である。また m の値は,

$$m = n+2 = 3, n=1$$

となる。

(答) $m=3, n=1$

3

(1)

$p = r \cos \beta, q = r \sin \beta$ のとき、 $r \geq 0$ を満たす実数 r について、

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= r^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = r^2 \\ \therefore r &= \sqrt{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

が成立する。

$$(\text{答}) \quad r = \sqrt{p^2 + q^2}$$

また、三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned} r \sin(\alpha + \beta) &= r(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= r \cos \beta \cdot \sin \alpha + r \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ &= p \sin \alpha + q \cos \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

三角関数の2倍角の公式および合成の公式を用いると、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta \\ &= a \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta + b \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta + \frac{a+b}{2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \sin(2\theta + \alpha) + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。ただし、 α は

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}, \sin \alpha = \frac{a-b}{2\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}$$

を満たす実数である。いま、 θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を満たすので、

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\leq f(\theta) \leq \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

が成立する。よって、 $f(\theta)$ の最小値 m 、最大値 M はそれぞれ

$$\begin{aligned} m &= -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \\ M &= \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}, M = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$$

(3)

(2)の結果より、 $f(\theta)$ の最小値は $m = -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$ である。つまりすべての θ について

$f(\theta) \geq 0$ となることは、 $m \geq 0$ となることと同値である。ゆえに、

$$\begin{aligned} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \quad (>0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{a+b}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow ab &\geq 1 \quad \text{かつ} \quad a+b > 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $ab \geq 1$ のとき、 $ab > 0$ であるため、 a, b はいずれも正となるか、いずれも負となるかのいずれかである。また、 $a+b > 0$ より $a > 0, b > 0$ となる。逆に、 $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき、 $a+b > 0$ は成り立つ。したがって、求める条件は、

$$ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0$$

(4)

(2)の結果より、 $f(\theta)$ の最大値は $M = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2}$ である。つまりすべての θ について

$f(\theta) \leq 0$ となることは、 $M \leq 0$ となることと同値である。ゆえに、

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} &\leq -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \quad (<0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad \frac{a+b}{2} < 0 \\ \Leftrightarrow ab &\geq 1 \quad \text{かつ} \quad a+b < 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $ab \geq 1$ のとき、 $ab > 0$ であるため、 a, b はいずれも正となるか、いずれも負となるかのいずれかである。また、 $a+b < 0$ より $a < 0, b < 0$ となる。逆に、 $a < 0$ かつ $b < 0$ のとき、 $a+b < 0$ は成り立つ。したがって、求める条件は、

$$ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad ab \geq 1 \quad \text{かつ} \quad a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0$$

(5)

$f(\theta)$ が正の値と負の値どちらもとることは、 $f(\theta)$ の最小値 m 、最大値 M が

$$m < 0 < M$$

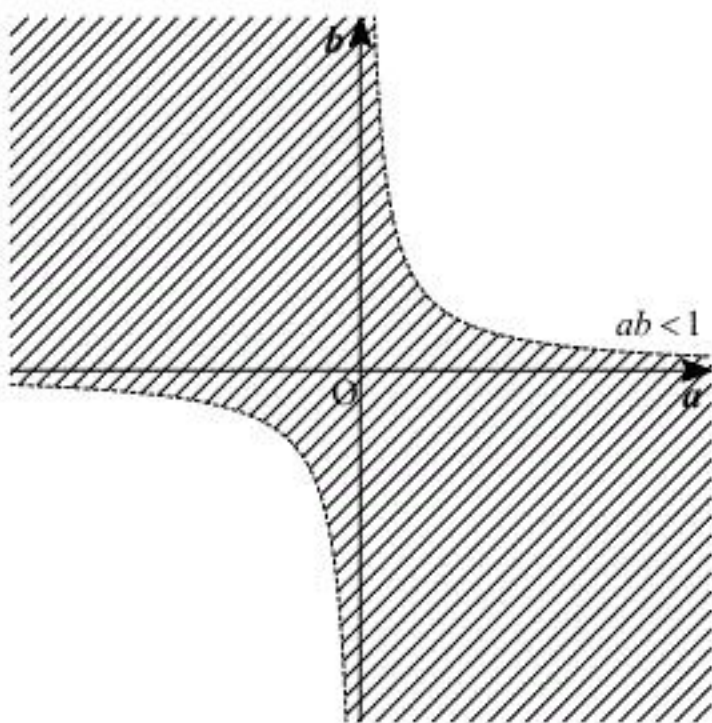
を満たすことと同値である。これは、

$$\begin{aligned} m < 0 < M \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} < 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} < 0 \quad \text{かつ} \quad 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立することと同値である。したがって、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} < 0 \\ 0 < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} + \frac{a+b}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} < \frac{a+b}{2} \\ \frac{a+b}{2} < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{a+b}{2} \right| < \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < 1 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 4 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow ab < 1 \end{aligned}$$

となる。これより、条件を満たす点 (a, b) 全体の集合は下の図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を除く。



(答) 条件： $ab < 1$ 、領域：上図(ただし境界は含まない。)

4

(1)

極座標において、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ であるから、

$$x = r \cos \theta = e^{a\theta} \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = e^{a\theta} \sin \theta$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = e^{a\theta} \cos \theta, \quad y = e^{a\theta} \sin \theta$$

(2)

$x = e^{a\theta} \cos \theta$, $y = e^{a\theta} \sin \theta$ より、

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{a\theta} \cos \theta - e^{a\theta} \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = ae^{a\theta} \sin \theta + e^{a\theta} \cos \theta$$

である。よって、求める曲線 C の長さは、

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\left(ae^{a\theta} \cos \theta - e^{a\theta} \sin \theta\right)^2 + \left(ae^{a\theta} \sin \theta + e^{a\theta} \cos \theta\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{a\theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta - 2a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + 2a \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \int_0^\pi e^{a\theta} d\theta \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left[\frac{e^{a\theta}}{a} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (e^{a\pi} - 1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} (e^{a\pi} - 1)$$

(3)

曲線 C 上の点 $P(x, y)$ における接線は、ベクトル $\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)$ と平行となるため、ベクトル

$\left(\frac{dy}{d\theta}, -\frac{dx}{d\theta}\right)$ はその接線の法線ベクトルの 1 つとなる。よって、接線の方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{d\theta} (x - e^{a\theta} \cos \theta) - \frac{dx}{d\theta} (y - e^{a\theta} \sin \theta) = 0 \\ & \Leftrightarrow (ae^{a\theta} \sin \theta + e^{a\theta} \cos \theta)(x - e^{a\theta} \cos \theta) - (ae^{a\theta} \cos \theta - e^{a\theta} \sin \theta)(y - e^{a\theta} \sin \theta) = 0 \\ & \Leftrightarrow e^{a\theta} \{(a \sin \theta + \cos \theta)x - (a \cos \theta - \sin \theta)y - e^{a\theta}\} = 0 \\ & \Leftrightarrow (a \sin \theta + \cos \theta)x - (a \cos \theta - \sin \theta)y - e^{a\theta} = 0 \quad (\because e^{a\theta} > 0) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad (a \sin \theta + \cos \theta)x - (a \cos \theta - \sin \theta)y - e^{a\theta} = 0$$

(4)

点 $P(e^{a\theta} \cos \theta, e^{a\theta} \sin \theta)$ と原点を通る直線 ℓ は、

$$\vec{p} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

に平行となる。また、曲線 C 上の点 P の接線 m は、 $\left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}\right)$ すなわち

$$\vec{d} = (a \cos \theta - \sin \theta, a \sin \theta + \cos \theta)$$

に平行となる。ここで、

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{d} &= \cos \theta \cdot (a \cos \theta - \sin \theta) + \sin \theta (a \sin \theta + \cos \theta) \\ &= a(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= a \end{aligned}$$

が成立する。また、2つのベクトル $\vec{p}, \vec{d}$ のなす角を α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{d} &= |\vec{p}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{(a \cos \theta - \sin \theta)^2 + (a \sin \theta + \cos \theta)^2} \cdot \cos \alpha \\ &= 1 \cdot \sqrt{a^2 + 1} \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \cos \alpha \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a^2 + 1} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $-1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1$ となるので、 $0 \leq \alpha \leq \pi$ の範囲に $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ を満たす α

はただ 1 つ存在し、これは θ によらず一定値である。よって、直線 ℓ と直線 m のなす角は P によらず一定である。

(証明終)

(5)

直線 ℓ と直線 m のなす角が $\frac{\pi}{12}$ となるのは、(4)における考察より、

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{または} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \cos \frac{\pi}{12} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となるときである。ここで、両辺を 2 乗して半角の公式を用いることで、

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + 1} &= \cos^2 \frac{\pi}{12} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 + 1} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} \quad (\because \text{半角の公式}) \end{aligned}$$

と式変形することができる。したがって、これを解くと

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + 1} &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow 4a^2 &= (2 + \sqrt{3})(a^2 + 1) \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow a^2 &= (2 + \sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow a &= 2 + \sqrt{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2 + \sqrt{3}$$

5

(1)

$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1} dx$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1} dx &= \int_0^1 \{\log(x+1)\}' \cdot \log(x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \{\log(x+1)\}^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}(\log 2)^2$

(2)

$t = \log(x+1)$ とおく。このとき、 $x = e^t - 1$ となるので、 $\frac{dx}{dt} = e^t$ であり、 x と t の関係は下の表のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\log 2$

したがって、置換積分と部分積分を用いて、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2} dx &= \int_0^{\log 2} \frac{t}{e^{2t}} \cdot e^t dt \\ &= \int_0^{\log 2} t e^{-t} dt \\ &= - \int_0^{\log 2} t (e^{-t})' dt \\ &= - \left[t e^{-t} \right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} 1 \cdot e^{-t} dt \\ &= -\log 2 \cdot e^{-\log 2} - \left[e^{-t} \right]_0^{\log 2} \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1 - \log 2}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1 - \log 2}{2}$

(3)

$f(x) = \log x$ は、 $x > 0$ において連続かつ微分可能である。そして、 $f'(x) = \frac{1}{x}$ であるから、

$x > 0$ において平均値の定理より、

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{t}, \quad x < t < x+h \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす実数 t が存在する。この t について、

$$\begin{aligned}0 < x < t < x+h \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+h} < \frac{1}{t} < \frac{1}{x}\end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。ここで、上の式の左辺の項 $\frac{1}{x+h}$ について、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+h} - \left(\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} \right) &= \frac{1}{x+h} - \frac{x-h}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - (x-h)(x+h)}{x^2(x+h)} \\ &= \frac{h^2}{x^2(x+h)} > 0 \quad (\because x > 0, h > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} < \frac{1}{x+h} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、

$$\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x}$$

が成立する。

(証明終)

(4)

(3) で得られた不等式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} &< \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{h}{x} - \left(\frac{h}{x} \right)^2 &< \log(x+h) - \log x < \frac{h}{x} \quad (\because h > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{h}{x} - \left(\frac{h}{x} \right)^2 &< \log \left(1 + \frac{h}{x} \right) < \frac{h}{x}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $t = \frac{h}{x}$ とおくと、 $t > 0$ である実数 t について、

$$t - t^2 < \log(1+t) < t \quad \dots \textcircled{4}$$

が成立する。ここで、

$$\log \left(\frac{k+n+1}{k+n} \right) \log \frac{k+n}{n} = \log \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

について、 $\frac{1}{n+k} > 0$ かつ $\log \left(1 + \frac{k}{n} \right) > 0 \left(\because 1 + \frac{k}{n} > 1 \right)$ であることから、 $\textcircled{4}$ 式を適用すると、

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{n+k} - \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 \right\} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) &< \log \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) < \frac{1}{n+k} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ \therefore \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n+k} - \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 \right\} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) &< \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)\end{aligned}$$

となる。ここで、上式の右辺について $n \rightarrow \infty$ の極限值を考えると、区分求積法により、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \log(1+x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2 \quad (\because (1) \text{ の結果})\end{aligned}$$

である。また、左辺についても同様に区分求積法により、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n+k} - \left(\frac{1}{n+k} \right)^2 \right\} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n} \right)^2} \right\} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n} \right)^2} \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \log(1+x) dx - 0 \cdot \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} \log(1+x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2 - 0 \cdot \frac{1 - \log 2}{2} \quad (\because (1), (2)) \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2\end{aligned}$$

となる。よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}(\log 2)^2$