

平成 30 年 度
前 期 日 程

数 学

教育学部[数学(口)]

医学部医学科

工学部

問 題 冊 子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよいが、表面に「裏に続く」と明記すること。
6. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
7. 解答用紙は持ち帰らないこと。
8. 問題冊子は持ち帰ること。
9. 大問ごとに、満点に対する配点の比率(%)を表示してある。

1 m, n を $m > n + 1$ をみたす自然数とする。 $S(n) = \sum_{k=1}^{6n} k^2$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $S(n)$ を n を用いて表せ。
- (2) $S(m) - S(n) = (m - n)T(m, n)$ となる $T(m, n)$ を m, n を用いて表せ。
- (3) $S(m) - S(n) = 2018$ をみたす m, n を求めよ。ただし、必要ならば、1009 が素数であることを用いてよい。

(配点比率 20 %)

2

原点を O とする座標空間に点 $A(2, 0, 0)$, $B(3, \sqrt{3}, 0)$, $C(x, y, z)$ がある。点 C は内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 2$ をみたすとする。また, $t = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) t を x を用いて表せ。

(2) 条件 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ から x, y, z がみたす関係式を求めよ。また, 条件 $|\overrightarrow{BC}| = 2$ から x, y, z がみたす関係式を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC}$ を t を用いて表せ。

(4) $-2 \leq t \leq 4$ となることを示せ。また, $t = 4$ のとき, 点 C の座標 (x, y, z) を求めよ。

(5) $|\overrightarrow{OC}|$ の最大値を求めよ。

(配点比率 20 %)

3 a, b を実数とする。関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = a \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + b \sin^2 \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

とする。以下の問に答えよ。

- (1) 0 以上の実数 r と実数 α, β に対して、 $p = r \cos \beta, q = r \sin \beta$ とおく。 r を p と q を用いて表せ。また、次の等式が成り立つことを示せ。

$$r \sin(\alpha + \beta) = p \sin \alpha + q \cos \alpha$$

- (2) 関数 $y = f(\theta)$ の最小値 m , 最大値 M を a, b を用いてそれぞれ表せ。
- (3) すべての θ に対して $f(\theta) \geq 0$ となる条件を a, b を用いて表せ。
- (4) すべての θ に対して $f(\theta) \leq 0$ となる条件を a, b を用いて表せ。
- (5) 関数 $y = f(\theta)$ が θ の値によって正の値も負の値もとりうる条件を a, b を用いて表せ。また、この条件をみたす点 (a, b) 全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(配点比率 20 %)

4 a を正の定数とする。極方程式

$$r = e^{a\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする。曲線 C 上の点 P の座標を (x, y) とおく。以下の問に答えよ。

- (1) x, y を θ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) 曲線 C の長さを求めよ。
- (3) 点 P における曲線 C の接線の方程式を θ を用いて表せ。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。
- (4) 曲線 C 上の点 P と原点を通る直線を ℓ 、点 P における曲線 C の接線を m とする。 ℓ と m のなす角は P によらず一定であることを示せ。
- (5) ℓ と m のなす角が $\frac{\pi}{12}$ となるような a の値を求めよ。

(配点比率 20 %)

5

以下の問に答えよ。

- (1) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1} dx$$

- (2) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2} dx$$

- (3) 正の実数
- x, h
- に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x}$$

- (4) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\log \frac{k+n+1}{k+n} \right) \log \frac{k+n}{n}$$

(配点比率 20 %)

