

(1)

さいころの目は1から6の目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ で出る。ここで、720を素因数分解すると

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって4回投げた中で1回だけ5が出る。残りの3回のさいころ目の出方のうち、3の倍数について考える。3の倍数のさいころの目は3, 6のいずれかであり、それぞれ素因数に3を1個もつから、 $\textcircled{1}$ より3の倍数の目は2回出る。以上より、

$$\{a, b, c, d\} = \{5, 2^j, 2^k \cdot 3, 2^l \cdot 3\}$$

である。ただし j, k, l は

$$0 \leq j \leq 2$$

$$0 \leq k \leq 1$$

$$0 \leq l \leq 1$$

を満たす整数である。このとき

$$abcd = 720$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^j (2^k \cdot 3) (2^l \cdot 3) = 720$$

$$\Leftrightarrow 2^{j+k+l} = 2^4$$

$$\therefore j+k+l=4$$

となる。よって

$$j=2, k=1, l=1$$

となる。したがって $N=720$ となる時、 $\{a, b, c, d\} = \{4, 5, 6, 6\}$ である。さいころを4つ投げて目が $\{4, 5, 6, 6\}$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{1!!12!} = \frac{1}{108}$$

である。

(答) $\frac{1}{108}$

(2)

$N=360$ を素因数分解すると

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって(1)と同様に4回投げた中で1回だけ5が出て、また、3の倍数の目は2回出る。したがって、

$$\{a, b, c, d\} = \{5, 2^j, 2^k \cdot 3, 2^l \cdot 3\}$$

である。ただし、 j, k, l は

$$0 \leq j \leq 2$$

$$0 \leq k \leq 1$$

$$0 \leq l \leq 1$$

を満たす整数である。このとき、

$$abcd = 360$$

$$\Leftrightarrow 2^{j+k+l} = 2^3$$

$$\therefore j+k+l=3$$

となる。これを満たす組 (j, k, l) は

$$(j, k, l) = (2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 1, 1)$$

の3通りであり、このとき、 $\{a, b, c, d\} = \{2, 5, 6, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}$ である。よって求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{1!!12!} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4! = \frac{1}{36}$$

となる。

(答) $\frac{1}{36}$

(3)

6が1回もでないとき、 N の最大値は

$$N = 5^4 = 625$$

より $N > 720$ を満たさない。よって6は少なくとも1回は出る。

[1] 6が1回だけ出るとき

このときの N の最大値は

$$N = 5^3 \cdot 6 = 750$$

となり $N > 720$ を満たす。次に大きい値は

$$N = 4 \cdot 5^2 \cdot 6 = 600$$

となり $N > 720$ を満たさず不適である。よって $\{a, b, c, d\} = \{5, 5, 5, 6\}$ のみ満たす。

[2] 6が2回以上出るとき

このとき、 $\{a, b, c, d\} = \{6, 6, m, n\}$ (m, n は1から6の整数) とすると

$$6 \cdot 6 \cdot m \cdot n > 720$$

$$\Leftrightarrow 36mn > 720$$

$$\therefore mn > 20$$

となる。これを満たす組 (m, n) は

$$(m, n) = (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$$

の4通りとなり、

$$\{a, b, c, d\} = \{4, 6, 6, 6\}, \{5, 5, 6, 6\}, \{5, 6, 6, 6\}, \{6, 6, 6, 6\}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める確率は

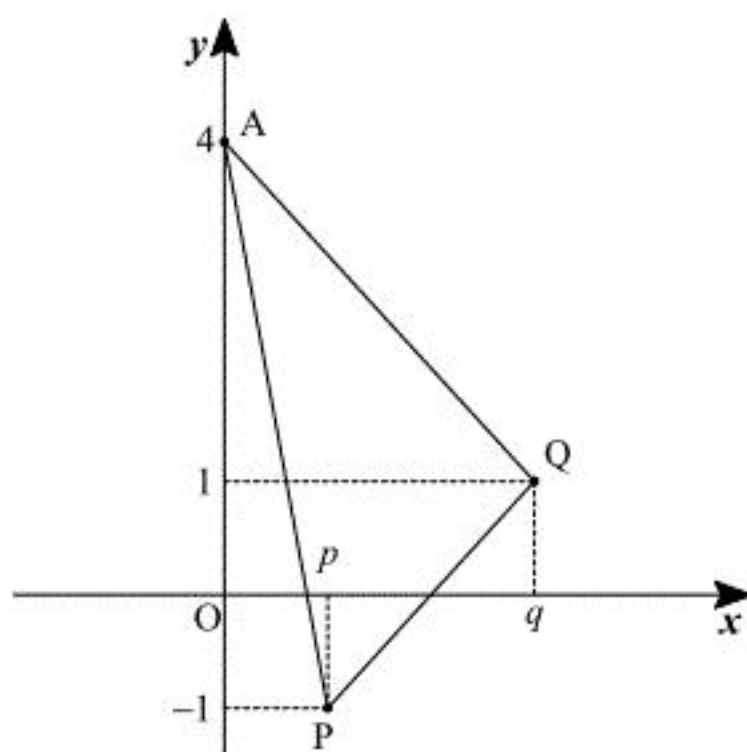
$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{2!2!} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 1 = \frac{19}{1296}$$

となる。

(答) $\frac{19}{1296}$

(1)

点 $A(0, 4)$, 点 $P(p, -1)$, 点 $Q(q, 1)$ を図示すると下図のようになる。



$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ を求めると

$$\overrightarrow{AP} = (p, -5), \overrightarrow{AQ} = (q, -3)$$

となる。よって $\triangle APQ$ の面積 S は, $0 < p < q$ を考慮して

$$S = \frac{1}{2} |p \cdot (-3) - q \cdot (-5)| = \frac{1}{2} (5q - 3p)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} (5q - 3p)$$

(2)

直角になる角について場合分けをして考える。

[1] $\angle PAQ = 90^\circ$ のとき

このとき,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$$

となるが

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = pq + 15$$

となり, $0 < p < q$ より $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ を満たす p, q は存在せず不適である。

[2] $\angle APQ = 90^\circ$ のとき

このとき, $\overrightarrow{PQ} = (q - p, 2)$ より

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow p(q - p) - 10 = 0$$

$$\therefore pq - p^2 - 10 = 0$$

となる。

[3] $\angle AQP = 90^\circ$ のとき

このとき, $\overrightarrow{PQ} = (q - p, 2)$ より

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow q(q - p) - 6 = 0$$

$$\therefore q^2 - pq - 6 = 0$$

となる。

以上[1], [2]より, $\triangle APQ$ が直角三角形になるための p, q の条件は

$$pq - p^2 - 10 = 0 \text{ または } q^2 - pq - 6 = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad pq - p^2 - 10 = 0 \text{ または } q^2 - pq - 6 = 0$$

(3)

(2)より, p, q は $pq - p^2 - 10 = 0$ または $q^2 - pq - 6 = 0$ を満たす。

[1] $pq - p^2 - 10 = 0$ のとき

このとき,

$$pq - p^2 - 10 = 0$$

$$\therefore q = \frac{p^2 + 10}{p} \quad (\because p \neq 0)$$

となる。(1)の結果に代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left(5 \cdot \frac{p^2 + 10}{p} - 3p \right) = p + \frac{25}{p}$$

となる。 $p > 0$ より $\frac{25}{p} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$S = p + \frac{25}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{25}{p}} = 10$$

となる。等号成立は

$$p = \frac{25}{p}$$

$$\Leftrightarrow p = 5 \quad (\because p > 0)$$

のときで, このとき $q = 7$ となり $0 < p < q$ を満たす。

[2] $q^2 - pq - 6 = 0$ のとき

このとき,

$$q^2 - pq - 6 = 0$$

$$\therefore p = \frac{q^2 - 6}{q} \quad (\because q \neq 0)$$

となる。(1)の結果に代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left(5q - 3 \cdot \frac{q^2 - 6}{q} \right) = q + \frac{9}{q}$$

となる。 $q > 0$ より $\frac{9}{q} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$S = q + \frac{9}{q} \geq 2\sqrt{q \cdot \frac{9}{q}} = 6$$

となる。等号成立は

$$q = \frac{9}{q}$$

$$\Leftrightarrow q = 3 \quad (\because q > 0)$$

のときで, このとき $p = 1$ となり $0 < p < q$ を満たす。

以上[1], [2]より, 面積 S は $p = 1, q = 3$ のとき最小値 6 をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } 6$$

(1)

$$\alpha = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \left\{ \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \right\}^2 \\ &= 2 + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})i - (1 + \sqrt{2})^2 \\ &= -1 - 2\sqrt{2} + (4 + 2\sqrt{2})i \\ \alpha^4 &= \left\{ -1 - 2\sqrt{2} + (4 + 2\sqrt{2})i \right\}^2 \\ &= (-1 - 2\sqrt{2})^2 + 2(-1 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})i - (4 + 2\sqrt{2})^2 \\ &= -15 - 12\sqrt{2} + (-24 - 20\sqrt{2})i\end{aligned}$$

となる。よって α^2 の実部は $-1 - 2\sqrt{2}$ 、虚部は $4 + 2\sqrt{2}$ 、 α^4 の実部は $-15 - 12\sqrt{2}$ 、虚部は $-24 - 20\sqrt{2}$ となる。

$$\begin{array}{ll}\alpha^2 & \begin{array}{l} \text{実部: } -1 - 2\sqrt{2} \\ \text{虚部: } 4 + 2\sqrt{2} \end{array} \\ \alpha^4 & \begin{array}{l} \text{実部: } -15 - 12\sqrt{2} \\ \text{虚部: } -24 - 20\sqrt{2} \end{array}\end{array}$$

(2)

(1)より、 $\alpha^4 + 2\alpha^2 + 16\alpha + 17$ の実部は

$$-15 - 12\sqrt{2} + 2(-1 - 2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2} + 17 = 0$$

となり、虚部は

$$-24 - 20\sqrt{2} + 2(4 + 2\sqrt{2}) + 16(1 + \sqrt{2}) = 0$$

となる。

(答) 実部：0，虚部：0

(3)

$x^2 + px + q = 0$ の2解が $\alpha, \bar{\alpha}$ であるとき、解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = -p \\ \alpha \bar{\alpha} = q \end{cases}$$

となる。 $\alpha = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i, \bar{\alpha} = \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i$ より

$$\begin{aligned}2\sqrt{2} &= -p \\ \therefore p &= -2\sqrt{2} \\ \left\{ \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \right\} \left\{ \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i \right\} &= q \\ \Leftrightarrow 2 + (1 + \sqrt{2})^2 &= q \\ \therefore q &= 5 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $p = -2\sqrt{2}, q = 5 + 2\sqrt{2}$

(4)

$(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ を展開すると

$$(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) = x^4 + (p + r)x^3 + (pr + q + s)x^2 + (ps + qr)x + qs$$

となる。 $x^4 + 2x^2 + 16x + 17 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ より、係数を比較して

$$\begin{cases} p + r = 0 & \cdots \text{①} \\ pr + q + s = 2 & \cdots \text{②} \\ ps + qr = 16 & \cdots \text{③} \\ qs = 17 & \cdots \text{④} \end{cases}$$

となる。(3)の結果を用いると、①式、④式から

$$\begin{aligned}r &= 2\sqrt{2} \\ s &= \frac{17}{5 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{17(5 - 2\sqrt{2})}{(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})} \\ &= 5 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。また、 $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$ のとき、②式、③式が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}pr + q + s &= -2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 5 + 2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{2} \\ &= 2 \\ ps + qr &= -2\sqrt{2}(5 - 2\sqrt{2}) + (5 + 2\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 16\end{aligned}$$

であるから、確かに、②式、③式も成り立つ。以上から $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$ となる。

(答) $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$

(5)

(4)より

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2}) = 0$$

となる。よって

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2} = 0 \text{ または } x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2} = 0$$

となる。 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2} = 0$ の解は(3)より $\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i, \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i$ である。

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2} = 0$ の解は、解の公式より

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4(5 - 2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(-1) \cdot (12 - 8\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})}i}{2} \\ &= -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

となる。よって求める解は

$$x = \sqrt{2} \pm (1 + \sqrt{2})i, -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i$$

となる。

(答) $x = \sqrt{2} \pm (1 + \sqrt{2})i, -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i$

(1)

 $2^{10} = 1024$ より

$$10^3 < 2^{10}$$

となる。両辺に常用対数をとって

$$\log_{10} 10^3 < \log_{10} 2^{10}$$

$$\Leftrightarrow 3 < 10 \log_{10} 2$$

$$\therefore \frac{3}{10} < \log_{10} 2$$

となる。 $2^{13} = 8192$ より

$$2^{13} < 10^4$$

となる。両辺に常用対数をとって

$$\log_{10} 2^{13} < \log_{10} 10^4$$

$$\Leftrightarrow 13 \log_{10} 2 < 4$$

$$\therefore \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

となる。以上より

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

である。両辺に100をかけると

$$30 < 100 \log_{10} 2 < \frac{400}{13}$$

$$\therefore 30 < 100 \log_{10} 2 < 31$$

となる。よって

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

となるから、 2^{100} は31桁の数である。

(答) 31桁

(3)

背理法を利用して、 $\log_{10} 2$ が無理数であることを示す。すなわち、 $\log_{10} 2$ が有理数であると仮定して矛盾を導く。(1)より $\log_{10} 2 > 0$ であるから、 $\log_{10} 2$ が有理数のとき a, b を互いに素な自然数として

$$\log_{10} 2 = \frac{a}{b}$$

とかける。このとき

$$2 = 10^{\frac{a}{b}}$$

$$\Leftrightarrow 2^b = 10^a$$

となる。しかし、右辺は5の倍数であるが左辺は5の倍数ではないため、矛盾が生じる。よって、仮定は誤りであり、 $\log_{10} 2$ は無理数である。

(証明終)

(1)

点 $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $P(t, t^2 - 2t^3)$ より $\triangle OPA$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{2} + t\right), \frac{1}{3}\left(0 + 0 + t^2 - 2t^3\right)\right) = \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{6}, \frac{t^2}{3} - \frac{2}{3}t^3\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad G\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{6}, \frac{t^2}{3} - \frac{2}{3}t^3\right)$$

(2)

$\overrightarrow{GP}$ を求めると

$$\overrightarrow{GP} = \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{6}, \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t^3\right)$$

となる。 $\overrightarrow{GP} \perp \overrightarrow{OA}$ のとき $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{3} - \frac{1}{12} &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{4}$$

(3)

4 次関数 $f(x) = -\frac{1}{2} + x^3(1 - 2x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x^3 \\ &= x^2(3 - 8x) \end{aligned}$$

となる。よって $0 < x < \frac{1}{2}$ であるから $f'(x) = 0$ となるとき、 $x = \frac{3}{8}$ である。増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{3}{8}$	...	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{3}{8}\right)$	$\searrow$	

よって $0 < x < \frac{1}{2}$ において $x = \frac{3}{8}$ のときに $f(x)$ は最大値をとる。最大値を計算すると

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{3}{8}\right) = -\frac{997}{2048} < 0$$

となる。よって $0 < x < \frac{1}{2}$ で $f(x) < 0$ である。

(証明終)

(4)

内積 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA}$ を考える。 $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PA}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PO} &= (-t, -t^2 + 2t^3) \\ \overrightarrow{PA} &= \left(\frac{1}{2} - t, -t^2 + 2t^3\right) \end{aligned}$$

となる。内積を計算すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} &= (-t) \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) + (-t^2 + 2t^3)^2 \\ &= \left(-\frac{t}{2}\right) \cdot (1 - 2t) + t^4(1 - 2t)^2 \\ &= (1 - 2t) \left\{ \left(-\frac{t}{2}\right) + t^4(1 - 2t) \right\} \\ &= t(1 - 2t) \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right) + t^3(1 - 2t) \right\} \\ &= t(1 - 2t)f(t) \end{aligned}$$

となる。 $0 < t < \frac{1}{2}$ より $t(1 - 2t) > 0$ であり, (3) より $f(t) < 0$ であるから

$$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} < 0$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} &< 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{PO}| |\overrightarrow{PA}| \cos \angle OPA &< 0 \\ \therefore \cos \angle OPA &< 0 \left(\because |\overrightarrow{PO}| > 0, |\overrightarrow{PA}| > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\angle OPA$ は $\triangle OPA$ の内角であることを考えると、 $\frac{\pi}{2} < \angle OPA < \pi$ となる。

以上から、 $\angle OPA$ は鈍角である。

(証明終)