

(1)

さいころの目は1から6の目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ で出る。ここで、720を素因数分解すると

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって4回投げた中で1回だけ5が出る。残りの3回のさいころ目の出方のうち、3の倍数について考える。3の倍数のさいころの目は3, 6のいずれかであり、それぞれ素因数に3を1個もつから、 $\textcircled{1}$ より3の倍数の目は2回出る。以上より、

$$\{a, b, c, d\} = \{5, 2^j, 2^k \cdot 3, 2^l \cdot 3\}$$

である。ただし j, k, l は

$$0 \leq j \leq 2$$

$$0 \leq k \leq 1$$

$$0 \leq l \leq 1$$

を満たす整数である。このとき

$$abcd = 720$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^j (2^k \cdot 3) (2^l \cdot 3) = 720$$

$$\Leftrightarrow 2^{j+k+l} = 2^4$$

$$\therefore j+k+l=4$$

となる。よって

$$j=2, k=1, l=1$$

となる。したがって $N=720$ となるとき、 $\{a, b, c, d\} = \{4, 5, 6, 6\}$ である。さいころを4つ投げて目が $\{4, 5, 6, 6\}$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{1!!2!} = \frac{1}{108}$$

である。

(答) $\frac{1}{108}$

(2)

$N=360$ を素因数分解すると

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって(1)と同様に4回投げた中で1回だけ5が出て、また、3の倍数の目は2回出る。したがって、

$$\{a, b, c, d\} = \{5, 2^j, 2^k \cdot 3, 2^l \cdot 3\}$$

である。ただし、 j, k, l は

$$0 \leq j \leq 2$$

$$0 \leq k \leq 1$$

$$0 \leq l \leq 1$$

を満たす整数である。このとき、

$$abcd = 360$$

$$\Leftrightarrow 2^{j+k+l} = 2^3$$

$$\therefore j+k+l=3$$

となる。これを満たす組 (j, k, l) は

$$(j, k, l) = (2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 1, 1)$$

の3通りであり、このとき、 $\{a, b, c, d\} = \{2, 5, 6, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}$ である。よって求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{1!!2!} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4! = \frac{1}{36}$$

となる。

(答) $\frac{1}{36}$

(3)

6が1回もでないとき、 N の最大値は

$$N = 5^4 = 625$$

より $N > 720$ を満たさない。よって6は少なくとも1回は出る。

[1] 6が1回だけ出るとき

このときの N の最大値は

$$N = 5^3 \cdot 6 = 750$$

となり $N > 720$ を満たす。次に大きい値は

$$N = 4 \cdot 5^2 \cdot 6 = 600$$

となり $N > 720$ を満たさず不適である。よって $\{a, b, c, d\} = \{5, 5, 5, 6\}$ のみ満たす。

[2] 6が2回以上出るとき

このとき、 $\{a, b, c, d\} = \{6, 6, m, n\}$ (m, n は1から6の整数) とすると

$$6 \cdot 6 \cdot m \cdot n > 720$$

$$\Leftrightarrow 36mn > 720$$

$$\therefore mn > 20$$

となる。これを満たす組 (m, n) は

$$(m, n) = (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$$

の4通りとなり、

$$\{a, b, c, d\} = \{4, 6, 6, 6\}, \{5, 5, 6, 6\}, \{5, 6, 6, 6\}, \{6, 6, 6, 6\}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める確率は

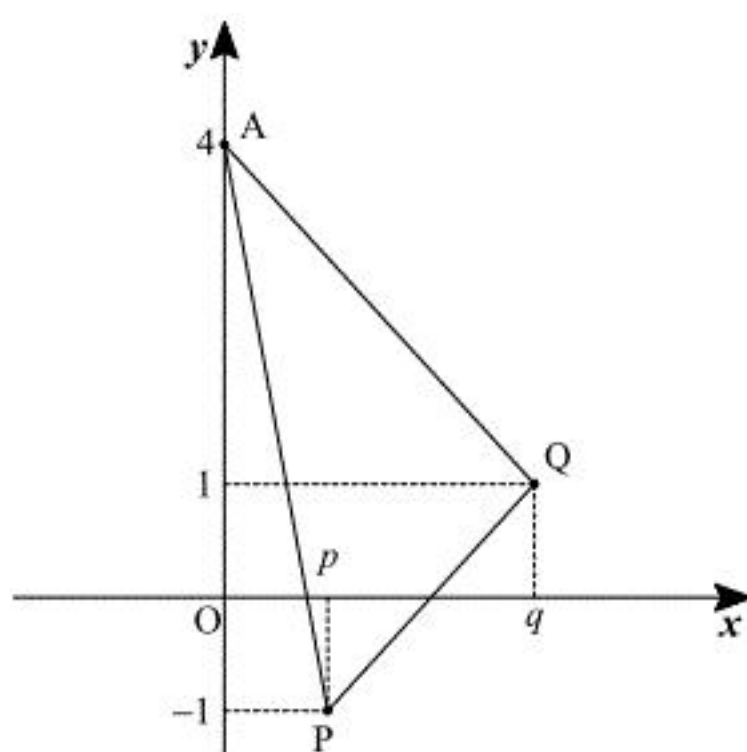
$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{4!}{2!2!} + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 1 = \frac{19}{1296}$$

となる。

(答) $\frac{19}{1296}$

(1)

点 $A(0, 4)$ 、点 $P(p, -1)$ 、点 $Q(q, 1)$ を図示すると下図のようになる。



$\overrightarrow{AP}$ 、 $\overrightarrow{AQ}$ を求めると

$$\overrightarrow{AP} = (p, -5), \overrightarrow{AQ} = (q, -3)$$

となる。よって $\triangle APQ$ の面積 S は、 $0 < p < q$ を考慮して

$$S = \frac{1}{2} |p \cdot (-3) - q \cdot (-5)| = \frac{1}{2} (5q - 3p)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} (5q - 3p)$$

(2)

直角になる角について場合分けをして考える。

[1] $\angle PAQ = 90^\circ$ のとき

このとき、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$$

となるが

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = pq + 15$$

となり、 $0 < p < q$ より $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$ を満たす p, q は存在せず不適である。

[2] $\angle APQ = 90^\circ$ のとき

このとき、 $\overrightarrow{PQ} = (q - p, 2)$ より

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow p(q - p) - 10 = 0$$

$$\therefore pq - p^2 - 10 = 0$$

となる。

[3] $\angle AQP = 90^\circ$ のとき

このとき、 $\overrightarrow{PQ} = (q - p, 2)$ より

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow q(q - p) - 6 = 0$$

$$\therefore q^2 - pq - 6 = 0$$

となる。

以上[1], [2]より、 $\triangle APQ$ が直角三角形になるための p, q の条件は

$$pq - p^2 - 10 = 0 \text{ または } q^2 - pq - 6 = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad pq - p^2 - 10 = 0 \text{ または } q^2 - pq - 6 = 0$$

(3)

(2)より、 p, q は $pq - p^2 - 10 = 0$ または $q^2 - pq - 6 = 0$ を満たす。

[1] $pq - p^2 - 10 = 0$ のとき

このとき、

$$pq - p^2 - 10 = 0$$

$$\therefore q = \frac{p^2 + 10}{p} \quad (\because p \neq 0)$$

となる。(1)の結果に代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left(5 \cdot \frac{p^2 + 10}{p} - 3p \right) = p + \frac{25}{p}$$

となる。 $p > 0$ より $\frac{25}{p} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$S = p + \frac{25}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{25}{p}} = 10$$

となる。等号成立は

$$p = \frac{25}{p}$$

$$\Leftrightarrow p = 5 \quad (\because p > 0)$$

のときで、このとき $q = 7$ となり $0 < p < q$ を満たす。

[2] $q^2 - pq - 6 = 0$ のとき

このとき、

$$q^2 - pq - 6 = 0$$

$$\therefore p = \frac{q^2 - 6}{q} \quad (\because q \neq 0)$$

となる。(1)の結果に代入すると

$$S = \frac{1}{2} \left(5q - 3 \cdot \frac{q^2 - 6}{q} \right) = q + \frac{9}{q}$$

となる。 $q > 0$ より $\frac{9}{q} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$S = q + \frac{9}{q} \geq 2\sqrt{q \cdot \frac{9}{q}} = 6$$

となる。等号成立は

$$q = \frac{9}{q}$$

$$\Leftrightarrow q = 3 \quad (\because q > 0)$$

のときで、このとき $p = 1$ となり $0 < p < q$ を満たす。

以上[1], [2]より、面積 S は $p = 1, q = 3$ のとき最小値 6 をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } 6$$

(1)

$$\alpha = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \left\{ \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \right\}^2 \\ &= 2 + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})i - (1 + \sqrt{2})^2 \\ &= -1 - 2\sqrt{2} + (4 + 2\sqrt{2})i \\ \alpha^4 &= \left\{ -1 - 2\sqrt{2} + (4 + 2\sqrt{2})i \right\}^2 \\ &= (-1 - 2\sqrt{2})^2 + 2(-1 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})i - (4 + 2\sqrt{2})^2 \\ &= -15 - 12\sqrt{2} + (-24 - 20\sqrt{2})i\end{aligned}$$

となる。よって α^2 の実部は $-1 - 2\sqrt{2}$ 、虚部は $4 + 2\sqrt{2}$ 、 α^4 の実部は $-15 - 12\sqrt{2}$ 、虚部は $-24 - 20\sqrt{2}$ となる。

$$\begin{array}{ll}\alpha^2 & \text{実部: } -1 - 2\sqrt{2} \\ & \text{虚部: } 4 + 2\sqrt{2} \\ \alpha^4 & \text{実部: } -15 - 12\sqrt{2} \\ & \text{虚部: } -24 - 20\sqrt{2}\end{array}$$

(2)

(1)より、 $\alpha^4 + 2\alpha^2 + 16\alpha + 17$ の実部は

$$-15 - 12\sqrt{2} + 2(-1 - 2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2} + 17 = 0$$

となり、虚部は

$$-24 - 20\sqrt{2} + 2(4 + 2\sqrt{2}) + 16(1 + \sqrt{2}) = 0$$

となる。

(答) 実部: 0, 虚部: 0

(3)

$x^2 + px + q = 0$ の2解が $\alpha, \bar{\alpha}$ であるとき、解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = -p \\ \alpha \bar{\alpha} = q \end{cases}$$

となる。 $\alpha = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i, \bar{\alpha} = \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i$ より

$$\begin{aligned}2\sqrt{2} &= -p \\ \therefore p &= -2\sqrt{2} \\ \left\{ \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i \right\} \left\{ \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i \right\} &= q \\ \Leftrightarrow 2 + (1 + \sqrt{2})^2 &= q \\ \therefore q &= 5 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $p = -2\sqrt{2}, q = 5 + 2\sqrt{2}$

(4)

$(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ を展開すると

$$(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) = x^4 + (p + r)x^3 + (pr + q + s)x^2 + (ps + qr)x + qs$$

となる。 $x^4 + 2x^2 + 16x + 17 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ より、係数を比較して

$$\begin{cases} p + r = 0 & \cdots \text{①} \\ pr + q + s = 2 & \cdots \text{②} \\ ps + qr = 16 & \cdots \text{③} \\ qs = 17 & \cdots \text{④} \end{cases}$$

となる。(3)の結果を用いると、①式、④式から

$$\begin{aligned}r &= 2\sqrt{2} \\ s &= \frac{17}{5 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{17(5 - 2\sqrt{2})}{(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2})} \\ &= 5 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。また、 $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$ のとき、②式、③式が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}pr + q + s &= -2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 5 + 2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{2} \\ &= 2 \\ ps + qr &= -2\sqrt{2}(5 - 2\sqrt{2}) + (5 + 2\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 16\end{aligned}$$

であるから、確かに、②式、③式も成り立つ。以上から $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$ となる。

(答) $r = 2\sqrt{2}, s = 5 - 2\sqrt{2}$

(5)

(4)より

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2}) = 0$$

となる。よって

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2} = 0 \text{ または } x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2} = 0$$

となる。 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 + 2\sqrt{2} = 0$ の解は(3)より $\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i, \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i$ である。

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 - 2\sqrt{2} = 0$ の解は、解の公式より

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4(5 - 2\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{(-1) \cdot (12 - 8\sqrt{2})}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})}i}{2} \\ &= -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

となる。よって求める解は

$$x = \sqrt{2} \pm (1 + \sqrt{2})i, -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i$$

となる。

(答) $x = \sqrt{2} \pm (1 + \sqrt{2})i, -\sqrt{2} \pm (-1 + \sqrt{2})i$

(1)

方程式 $32t^3 - 16t + 1 = 0$ の左辺を $g(t)$ とする。 $g(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 96t^2 - 16 \\ &= 16(6t^2 - 1) \\ &= 16(\sqrt{6}t + 1)(\sqrt{6}t - 1) \end{aligned}$$

となる。よって $-1 < -\frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{6}} < 1$ であるから、 $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表を描くと以下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-15	↗	極大	↘	極小	↗	17

極大値は $g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ であり

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 32 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 1 = \frac{9 + 16\sqrt{6}}{9} > 0$$

となる。極小値は $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ であり

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 32 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 - 16 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 1 = \frac{9 - 16\sqrt{6}}{9}$$

となる。 $2 < \sqrt{6} < 3$ より $9 - 16\sqrt{6} < 0$ であるから $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) < 0$ となる。よって、曲線 $y = g(t)$ は、

$-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} < t < \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} < t < 1$ の範囲に、 t 軸と1つずつ共有点をもつから、方程式

$32t^3 - 16t + 1 = 0$ は $-1 \leq t \leq 1$ において3つの異なる実数解を持つ。

(証明終)

(2)

$\sin 4x$ を2倍角の公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x \\ &= 2 \cdot 2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x \end{aligned}$$

となる。よって

$$\sin 4x = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

方程式 $4 \sin 4x + \sin x = 0$ を変形する。(2)の結果を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} 4 \sin 4x + \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x + \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x (16 \cos x - 32 \sin^2 x \cos x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x \{16 \cos x - 32(1 - \cos^2 x) \cos x + 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x (32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1) &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。よって $4 \sin 4x + \sin x = 0$ のとき、

$$\sin x = 0 \text{ または } 32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1 = 0$$

となる。 $32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1 = 0$ において、 $t = \cos x$ とすると、 $0 \leq x \leq \pi$ より $-1 \leq t \leq 1$ となり、 x と t は1対1に対応する。(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} 32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow g(t) &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 $0 \leq x \leq \pi$ における $32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1 = 0$ の解の個数は3個である。また、 $\sin x = 0$ の解は

$$x = 0, \pi$$

の2個である。 $x = 0, \pi$ は $32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1 = 0$ の解とはならないから、方程式

$4 \sin 4x + \sin x = 0$ の、 $0 \leq x \leq \pi$ における解の個数は

$$3 + 2 = 5 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 5個

(4)

関数 $f(x) = \cos 4x + \cos x$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin 4x) \cdot 4 - \sin x \\ &= -(4 \sin 4x + \sin x) \\ &= -\sin x (32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1) \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。 $32t^3 - 16t + 1 = 0$ の解を $\alpha, \beta, \gamma (\alpha < \beta < \gamma)$ とすると、(1)より

$$-1 < \alpha < \beta < \gamma < 1$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x (32 \cos^3 x - 16 \cos x + 1) \\ &= -32 \sin x (\cos x - \alpha)(\cos x - \beta)(\cos x - \gamma) \end{aligned}$$

となる。 α, β, γ をとるとき x をそれぞれ a, b, c とすると、 $-1 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ より

$$0 < c < b < a < \pi$$

となる。また、 $f'(x) = 0$ となるとき

$$x = 0, c, b, a, \pi$$

となる。ここで、 $0 \leq x \leq \pi$ における $\cos x - \alpha, \cos x - \beta, \cos x - \gamma$ の正負は下の表のとおりである。

x	0	...	c	...	b	...	a	...	π
$\cos x - \alpha$	+	+	+	+	+	+	0	-	-
$\cos x - \beta$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$\cos x - \gamma$	+	+	0	-	-	-	--		-

したがって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で関数 $f(x) = \cos 4x + \cos x$ の増減表を描くと以下のようになる。

x	0	...	c	...	b	...	a	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

増減表より、関数 $f(x) = \cos 4x + \cos x$ が極小となる x の値は、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で2個ある。

(答) 2個

(1)

関数 $f(x) = e^{-2x}(\cos x - 3\sin x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}(\cos x - 3\sin x) + e^{-2x}(-\sin x - 3\cos x) \\ &= 5e^{-2x}(\sin x - \cos x) \\ &= 5\sqrt{2}e^{-2x}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ より $f'(x) = 0$ となるとき

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

となる。よって増減表を描くと以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f(2\pi)$

増減表より $f(x)$ の最大値は $f(0)$, $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ のいずれかである。それぞれ計算すると

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(\frac{5}{4}\pi\right) &= e^{-\frac{5}{2}\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{5}{2}\pi} \end{aligned}$$

となる。大小を比較すると、 $1 - \sqrt{2}e^{-\frac{5}{2}\pi}$ を考えて

$$1 - \sqrt{2}e^{-\frac{5}{2}\pi} = e^{-\frac{5}{2}\pi}\left(e^{\frac{5}{2}\pi} - \sqrt{2}\right) > e^{-\frac{5}{2}\pi}(e - \sqrt{2}) > 0$$

となるから、 $f(0) > f\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ であり、 $f(x)$ は $x=0$ のときに最大値1をとる。 $f(x)$ の最小値は

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(2\pi)$ のいずれかである。それぞれ計算すると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \\ f(2\pi) &= e^{-4\pi} \end{aligned}$$

となる。 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $f(2\pi) > 0$ より、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ のときに最小値 $-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$ をとる。

(答) 最大値1, 最小値 $-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

(2)

定積分 $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ を

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = I$$

とする。 I を計算すると、部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-2x}(\cos x - 3\sin x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-2x})' (\cos x - 3\sin x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[e^{-2x}(\cos x - 3\sin x) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-2x}(-\sin x - 3\cos x) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-4\pi} - 1) - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{-2x})' (-\sin x - 3\cos x) dx \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-4\pi} - 1) - \frac{1}{4} \left\{ \left[e^{-2x}(-\sin x - 3\cos x) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-2x}(-\cos x + 3\sin x) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-4\pi} - 1) - \frac{1}{4}(-3e^{-4\pi} + 3) - \frac{1}{4}I \\ \therefore \frac{5}{4}I &= \frac{e^{-4\pi} - 1}{4} \\ \therefore I &= \frac{e^{-4\pi} - 1}{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{e^{-4\pi} - 1}{5}$