

数 学

1 $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。放物線 $y = f(x)$ を C とし、直線 $y = 3x$ を l とする。自然数 $n = 1, 2, \dots$ について、実数 x_n と直線 l_n を次のように定める。

① $x_1 = 2$ とし、点 $(x_1, f(x_1)) = (2, 7)$ における C の接線を l_1 とする。

② 自然数 n について、実数 x_n と直線 l_n が定まったとき、 l と l_n の交点の x 座標を x_{n+1} とし、点 $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ における C の接線を l_{n+1} とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) l_n の方程式を x_n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ の漸化式を求めよ。

(3) x_n を n の式で表せ。

数 学

- 2** 複素数平面において、 0 と $\cos \theta + i \sin \theta$ を通る直線と 3 点 $1, 3, 2 + ih$ を頂点とする三角形の辺が 2 つの共有点 z_1, z_2 ($|z_1| < |z_2|$) をもつとする。ただし、 $0 < h, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

次の問いに答えよ。

- (1) z_1, z_2 を h, θ を用いて表せ。
- (2) $\frac{|z_2|}{|z_1|} = k$ とおくとき、 $\frac{\tan \theta}{h}$ を k を用いて表せ。

数 学

3

次の問いに答えよ。

- (1) 平面上の $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (ベクトルの内積)が成立するとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 平面上の四角形 $ABCD$ の内角はどれも 180° より小とする。 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (ベクトルの内積)が成立するとき、四角形 $ABCD$ は長方形であることを示せ。

数 学

4 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + 8$ に原点から 2 本の接線を引くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 本の接線の方程式を求めよ。
- (2) 接点の座標を求めよ。
- (3) この放物線と 2 本の接線で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (4) (3)の図形を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

数 学

5 a, b, c は定数で $c > 2$ とする。関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - ax + a - 1}$ ($x > 0$) は極大値 -1 をとり、 $y = f(x)$ と $y = bx$ のグラフは点 $\left(c, -\frac{3}{2}\right)$ で交わるとする。次の問いに答えよ。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = bx$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。