

数 学

1 $f(x) = x^2 + x + 1$ とする。放物線 $y = f(x)$ を C とし、直線 $y = 3x$ を l とする。自然数 $n = 1, 2, \dots$ について、実数 x_n と直線 l_n を次のように定める。

- ① $x_1 = 2$ とし、点 $(x_1, f(x_1)) = (2, 7)$ における C の接線を l_1 とする。
- ② 自然数 n について、実数 x_n と直線 l_n が定まったとき、 l と l_n の交点の x 座標を x_{n+1} とし、点 $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ における C の接線を l_{n+1} とする。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) l_n の方程式を x_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の漸化式を求めよ。
- (3) x_n を n の式で表せ。

数 学

2 複素数平面において、 0 と $\cos \theta + i \sin \theta$ を通る直線と 3 点 $1, 3, 2 + ih$ を頂点とする三角形の辺が 2 つの共有点 z_1, z_2 ($|z_1| < |z_2|$) をもつとする。ただし、 $0 < h, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

次の問いに答えよ。

- (1) z_1, z_2 を h, θ を用いて表せ。
- (2) $\frac{|z_2|}{|z_1|} = k$ とおくとき、 $\frac{\tan \theta}{h}$ を k を用いて表せ。

数 学

3 次の問いに答えよ。

- (1) 平面上の $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (ベクトルの内積)が成立するとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。
- (2) 平面上の四角形 $ABCD$ の内角はどれも 180° より小とする。 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (ベクトルの内積)が成立するとき、四角形 $ABCD$ は長方形であることを示せ。

数 学

4 長軸が x 軸上にある楕円 C が 2 点 $P_1 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right)$, $P_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ を通るとき, 次の問いに答えよ。

(1) P_1 における C の接線の方程式が $4x + 12y = 5$ であるとき, C の方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた C の極方程式を求めよ。

数 学

- 5 放物線 $y = (x + 1)^2$ 上に定点 $A(-3, 4)$, $B(0, 1)$ をとる。点 P が点 B を出発して、この放物線上を $x \geq 0$ の方向に動くとき、出発してから t 秒後の点 P の座標を (x, y) とする。また、線分 AP とこの放物線で囲まれた部分の面積 S について、 $\frac{dS}{dt}$ は一定値 1 をとるとする。次の問いに答えよ。
- (1) S を x を用いて表せ。
 - (2) $\frac{dx}{dt}$ を x を用いて表せ。
 - (3) 点 $P(x, y)$ の動く速さを x を用いて表せ。
 - (4) 点 P の動く速さが最大となるときの点 P の座標を求めよ。