

1

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ はすべて異なる実数であり、 a, b を入れ替えても求める等差数列は変わらないから、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ の大小関係を

$$\begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 \\ \beta_1 < \beta_2 \\ \alpha_1 < \beta_1 \end{cases}$$

と定めても一般性を失わない。このとき、

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$$

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$$

$$\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$$

の3つの場合があるが、それぞれが等差数列を成すための条件を順々に考えていく。

ここで、2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の判別式を D_1 とすると、関係式

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -a \\ \alpha_2 - \alpha_1 = \sqrt{D_1} \end{cases} \quad \dots\dots ①$$

を満たし、2次方程式 $x^2 + bx + a = 0$ の判別式を D_2 とすると、関係式

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = -b \\ \beta_2 - \beta_1 = \sqrt{D_2} \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

を満たすことに注意する。

[1] $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ のとき

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ がこの順で等差数列をなすための条件は、公差を d とすると

$$\begin{cases} d = \sqrt{D_1} \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

$$\begin{cases} d = \sqrt{D_2} \end{cases} \quad \dots\dots ④$$

$$\begin{cases} d = \frac{\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{2} = \frac{a - b}{4} \end{cases} \quad \dots\dots ⑤$$

を満たすことである。③、④より、

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4b = b^2 - 4a$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \quad \text{または} \quad a + b = -4$$

となるが、 $a = b$ のとき $\alpha_1 = \beta_1$ になってしまうから、 $a + b = -4$ を満たすことが必要である。よって、③、⑤より

$$\sqrt{D_1} = \frac{a - b}{4}$$

$$\Rightarrow 16D_1 = (a - b)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(a^2 + 4(a + 4)) = (2a + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)^2 + 16 = 0$$

を満たさねばならないが、これを満たす実数 a は存在しない。したがって、この場合の等差数列は存在しない。

[2] $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$ のとき

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ がこの順で等差数列をなすための条件は、公差を d とすると

$$\begin{cases} d = \frac{\sqrt{D_1}}{2} \end{cases} \quad \dots\dots ⑥$$

$$\begin{cases} d = \frac{\sqrt{D_2}}{2} \end{cases} \quad \dots\dots ⑦$$

$$\begin{cases} d = \frac{\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{2} = \frac{a - b}{2} \end{cases} \quad \dots\dots ⑧$$

を満たすことである。⑥、⑦より、[1]と同様に考えると、 $a + b = -4$ を満たすことが必要であることがわかるから、⑥、⑧より

$$\frac{\sqrt{D_1}}{2} = \frac{a - b}{2}$$

$$\Rightarrow D_1 = (a - b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4(a + 4) = (2a + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow a(a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, -4$$

が a の値の候補であることがわかる。逆に、 $(a, b) = (0, -4)$ のとき

$$\alpha_1 = -2, \beta_1 = 0, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 4$$

となるから題意を満たし、 $(a, b) = (-4, 0)$ のときは $\beta_1 < \alpha_1$ になってしまうから不適である。

[3] $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$ のとき

$\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2$ がこの順で等差数列をなすためには、

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \dots\dots ⑨$$

を満たすことが必要だが、⑨より

$$-\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

となり、 $\alpha_1 = \beta_1$ になってしまうから不適である。したがって、この場合の等差数列は存在しない。

以上[1], [2], [3]より、求める等差数列は

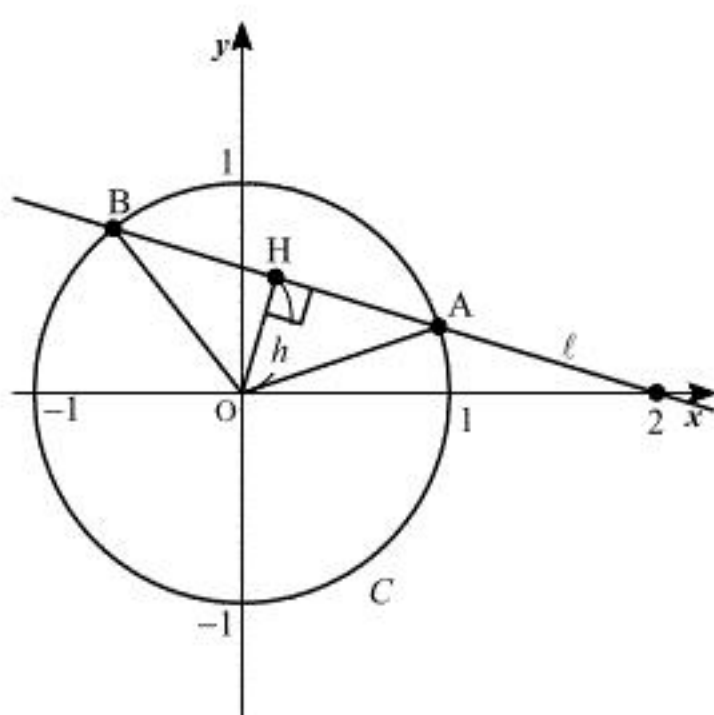
$$-2, 0, 2, 4 \quad \text{または} \quad 4, 2, 0, -2$$

であることがわかる。

(答) $-2, 0, 2, 4$ または $4, 2, 0, -2$

2

(1)



直線 ℓ を表す式は

$$y = m(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow mx - y - 2m = 0$$

であるから、原点 O と ℓ の距離を h とすると、点と直線の距離公式より

$$h = \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。よって、直線 ℓ と円 C が異なる 2 点で交わるための条件は

$$h < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2|m| < \sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 < 1+m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

(答) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

三平方の定理より、

$$AH^2 = OA^2 - OH^2$$

$$= 1 - h^2$$

$$= \frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}$$

$$\therefore AH = \sqrt{\frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}}$$

であり、 $AB = 2AH$ であるから、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH$$

$$= AH \cdot OH$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$= \frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{1 + m^2}$$

と求まる。

(答) $\frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{1 + m^2}$

(3)

直線 ℓ と曲線 C の交点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると、 α, β は 2 次方程式

$$x^2 + \{m(x - 2)\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + (4m^2 - 1) = 0$$

の解であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{4m^2}{m^2 + 1}, \alpha\beta = \frac{4m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

が成立する。各点の座標は $A(\alpha, m(\alpha - 2)), B(\beta, m(\beta - 2))$ であるから、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \alpha\beta + m^2(\alpha - 2)(\beta - 2)$$

$$= (m^2 + 1)\alpha\beta - 2m^2(\alpha + \beta) + 4m^2$$

$$= (m^2 + 1)\frac{4m^2 - 1}{m^2 + 1} - 2m^2\frac{4m^2}{m^2 + 1} + 4m^2$$

$$= \frac{7m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

と求まる。

(答) $\frac{7m^2 - 1}{m^2 + 1}$

3

(1)

与えられた関数 $f(x) = 2^x - 2^{-x} - \frac{1}{2}x$ を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^x \log 2 - 2^{-x} \log 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \\ &= \log 2 (2^x + 2^{-x}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、相加平均と相乗平均に関する不等式より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

であるから,

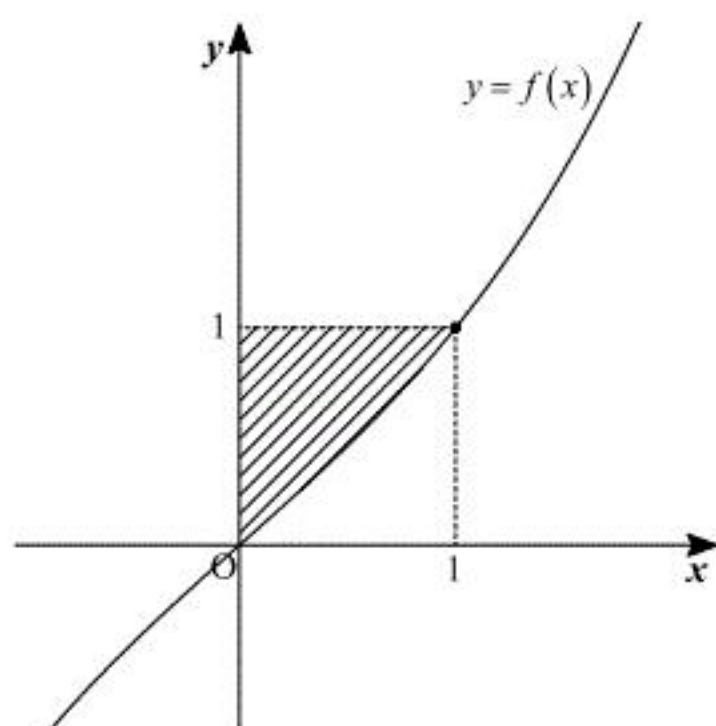
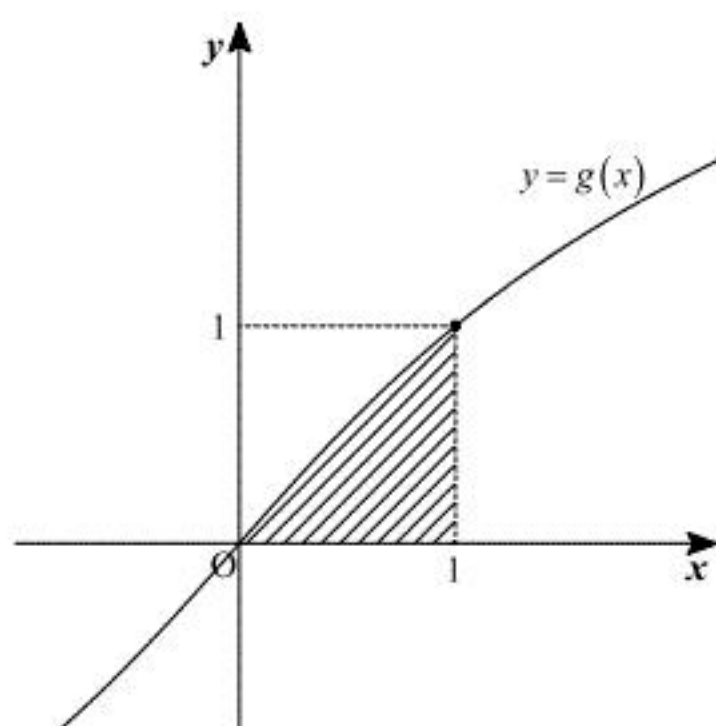
$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 2\log 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{16}{e} \\ &> 0 \quad (\because 0 < e < 16) \end{aligned}$$

となる。したがって、すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ であるから、 $f(x)$ はつねに増加することが示された。

(証明終)

(2)

関数 $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから、曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $y = 0, x = 1$ で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0, y = 1$ で囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積と等しい。



また、 $f(0) = 0, f(1) = 1$ であり、(1)より $f(x)$ はつねに増加することに注意すると、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=1} \pi x^2 dy &= \pi \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2 \left\{ \log 2 (2^x + 2^{-x}) - \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \pi \log 2 \int_0^1 x^2 (2^x + 2^{-x}) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx \end{aligned}$$

と立式できる。ここで、 C を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} \int x^2 (2^x + 2^{-x}) dx &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{\log 2} \int x (2^x - 2^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^2} \int (2^x + 2^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^3} (2^x - 2^{-x}) + C \end{aligned}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned} &\pi \log 2 \int_0^1 x^2 (2^x + 2^{-x}) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx \\ &= \pi \log 2 \left[\frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^3} (2^x - 2^{-x}) \right]_0^1 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \pi \log 2 \left(\frac{1}{\log 2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{(\log 2)^2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{(\log 2)^3} \cdot \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi}{6} \\ &= \pi \left\{ \frac{4}{3} - \frac{5}{\log 2} + \frac{3}{(\log 2)^2} \right\} \end{aligned}$$

である。

(答) $\pi \left\{ \frac{4}{3} - \frac{5}{\log 2} + \frac{3}{(\log 2)^2} \right\}$

(1)

x, y, z を $2n$ 以下の自然数とすると、

$$x \leq 2y \leq z$$

を満たす点 (x, y, z) の個数を求める。 $y = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を固定すると、 x は

$$1, 2, \dots, 2k$$

の $2k$ 通りの自然数を取ることができ、 z は

$$2k, 2k+1, \dots, 2n$$

の $2n - 2k + 1$ 通りの自然数を取りうるから、求める個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2k(2n - 2k + 1) &= 2(2n + 1) \sum_{k=1}^n k - 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 2(2n + 1) \cdot \frac{n(n + 1)}{2} - 4 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\ &= \frac{1}{3} n(n + 1)(2n + 1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} n(n + 1)(2n + 1)$$

(2)

x, y, z を $6n$ 以下の自然数とすると、これを満たす点 (x, y, z) は全部で $(6n)^3$ 個ある。この

うち積 xyz が 6 の倍数にならない点の数を求めて引けば、積 xyz が 6 の倍数である点 (x, y, z) の個数が求まる。以下、集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すことにする。ここで、各集合を

$$P = \{(x, y, z) \mid \text{積 } xyz \text{ は } 6 \text{ の倍数でない}\}$$

$$Q = \{(x, y, z) \mid \text{積 } xyz \text{ は } 2 \text{ の倍数でない}\}$$

$$R = \{(x, y, z) \mid \text{積 } xyz \text{ は } 3 \text{ の倍数でない}\}$$

$$S = \{(x, y, z) \mid \text{積 } xyz \text{ は } 2 \text{ の倍数でも } 3 \text{ の倍数でもない}\}$$

とおくと、

$$n(Q) = (6n - 3n)^3$$

$$n(R) = (6n - 2n)^3$$

$$n(S) = \{6n - (2n + 3n - n)\}^3$$

であるから、

$$\begin{aligned} n(P) &= n(Q) + n(R) - n(S) \\ &= (3n)^3 + (4n)^3 - (2n)^3 \\ &= 83n^3 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める個数は

$$(6n)^3 - 83n^3 = 133n^3 \quad [\text{個}]$$

である。

$$(\text{答}) \quad 133n^3$$

数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_4 = a \\ a_n a_{n+3} - a_{n+1} a_{n+2} = -(a_{n-1} a_{n+2} - a_n a_{n+1}) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

を満たすとき、すべての自然数 m に対して

$$\begin{cases} a_{2m-1} = 1 \\ a_{2m} = (m-1)a - (m-2) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立することを数学的帰納法によって示す。

[1] $m=1, 2$ のとき①が成立することを示す

①に $m=1, 2$ を代入して変形することで

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = 1 \\ a_2 &= (1-1)a - (1-2) = 1 \\ a_4 &= (2-1)a - (2-2) = a \end{aligned}$$

となるから、①は成立することがわかる。

[2] $m=1, 2, \dots, k$ ($k \geq 2$) のとき①の成立を仮定し、 $m=k+1$ のとき①が成立することを示す

与えられた漸化式に $n=2k-2$ を代入することで

$$\begin{aligned} a_{2k-2} a_{2k+1} - a_{2k-1} a_{2k} &= -(a_{2k-3} a_{2k} - a_{2k-2} a_{2k-1}) \\ \Leftrightarrow a_{2k-2} a_{2k+1} - a_{2k} &= -a_{2k} + a_{2k-2} \\ \Leftrightarrow a_{2k-2} (a_{2k+1} - 1) &= 0 \\ \therefore a_{2k+1} &= 1 \quad (\because a_{2k-2} \neq 0) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $n=2k-1$ を代入することで

$$\begin{aligned} a_{2k-1} a_{2k+2} - a_{2k} a_{2k+1} &= -(a_{2k-2} a_{2k+1} - a_{2k-1} a_{2k}) \\ \Leftrightarrow a_{2k+2} - a_{2k} &= -a_{2k-2} + a_{2k} \\ \Leftrightarrow a_{2k+2} &= 2a_{2k} - a_{2k-2} \\ \Leftrightarrow a_{2k+2} &= 2\{(k-1)a - (k-2)\} - \{(k-2)a - (k-3)\} \\ \therefore a_{2k+2} &= ka - (k-1) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。したがって②、③より、 $m=k+1$ のとき①が成立することが示された。

以上[1], [2]より、数学的帰納法によってすべての自然数 m に対して①が成立することが示された。

ここで、 $a_{100} = 148$ であることから

$$\begin{aligned} a_{100} &= 148 \\ \Leftrightarrow 49a - 48 &= 148 \\ \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

であることがわかるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} a_{2m-1} = 1 \\ a_{2m} = 3m - 2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} a_{2m-1} = 1 \\ a_{2m} = 3m - 2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$