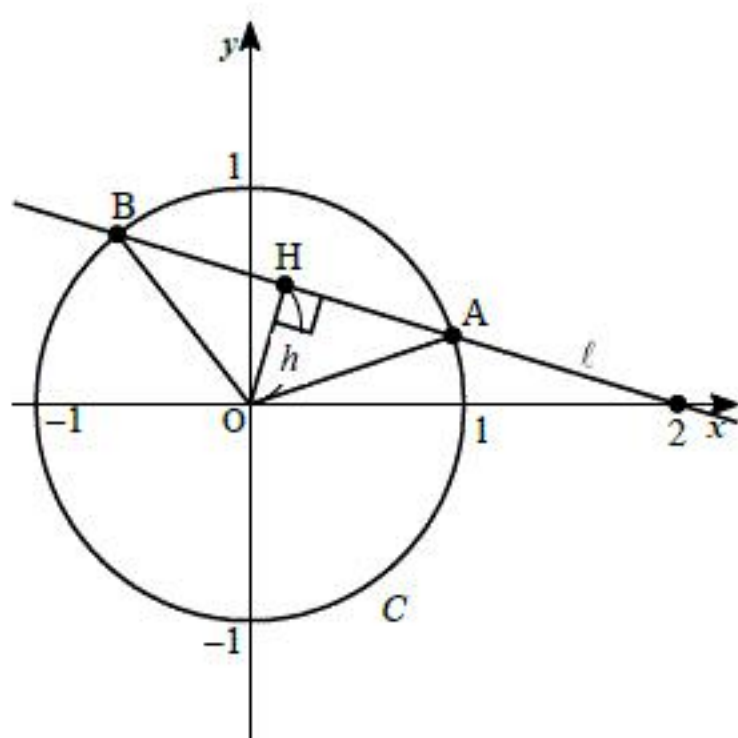


1

(1)



直線 ℓ を表す式は

$$\begin{aligned} y &= m(x-2) \\ \Leftrightarrow mx - y - 2m &= 0 \end{aligned}$$

であるから、原点 O と ℓ の距離を h とすると、点と直線の距離公式より

$$h = \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。よって、直線 ℓ と円 C が異なる 2 点で交わるための条件は

$$\begin{aligned} h &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}} &< 1 \\ \Leftrightarrow 2|m| &< \sqrt{1+m^2} \\ \Leftrightarrow 4m^2 &< 1+m^2 \\ \Leftrightarrow m^2 &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} &< m < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2)

三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AH^2 &= OA^2 - OH^2 \\ &= 1 - h^2 \\ &= \frac{1-3m^2}{1+m^2} \end{aligned}$$

$$\therefore AH = \sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}$$

であり、 $AB = 2AH$ であるから、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH \\ &= AH \cdot OH \\ &= \sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}} \\ &= \frac{2|m|\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2|m|\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}$$

(3)

直線 ℓ と曲線 C の交点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると、 α, β は 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2 + \{m(x-2)\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (m^2+1)x^2 - 4m^2x + (4m^2-1) &= 0 \end{aligned}$$

の解であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{4m^2}{m^2+1}, \quad \alpha\beta = \frac{4m^2-1}{m^2+1}$$

が成立する。各点の座標は $A(\alpha, m(\alpha-2)), B(\beta, m(\beta-2))$ であるから、

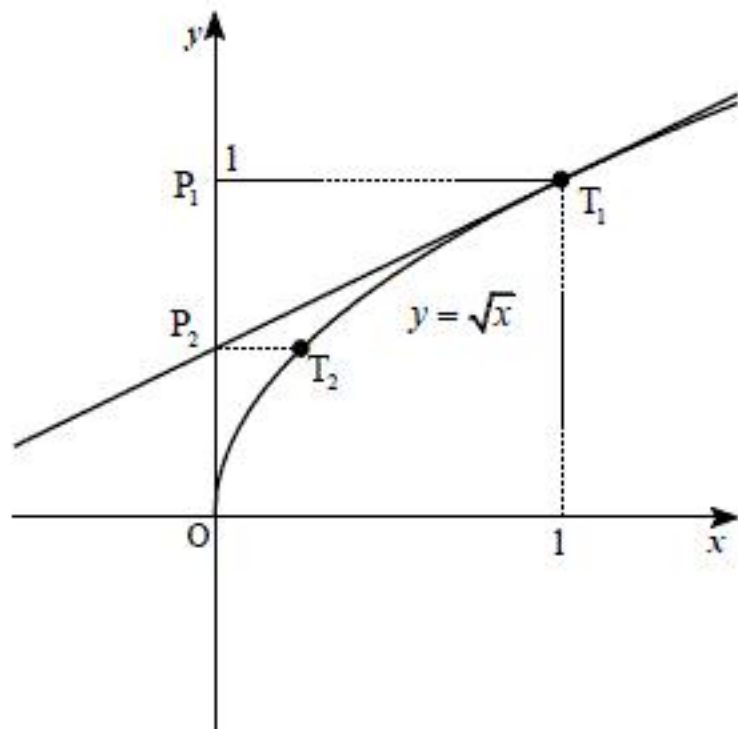
$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= \alpha\beta + m^2(\alpha-2)(\beta-2) \\ &= (m^2+1)\alpha\beta - 2m^2(\alpha+\beta) + 4m^2 \\ &= (m^2+1)\frac{4m^2-1}{m^2+1} - 2m^2\frac{4m^2}{m^2+1} + 4m^2 \\ &= \frac{7m^2-1}{m^2+1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7m^2-1}{m^2+1}$$

2

(1)



与えられた関数 $y = \sqrt{x}$ を微分すると、

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となり、直線 T_1P_1 は点 $(1, 1)$ における曲線 C の接線であるから、その方程式は

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

である。よって、点 P_2, T_2 は

$$P_2\left(0, \frac{1}{2}\right), T_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。また、直線 T_2P_3 は点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ における曲線 C の接線であるから、その方程式は

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{4}$$

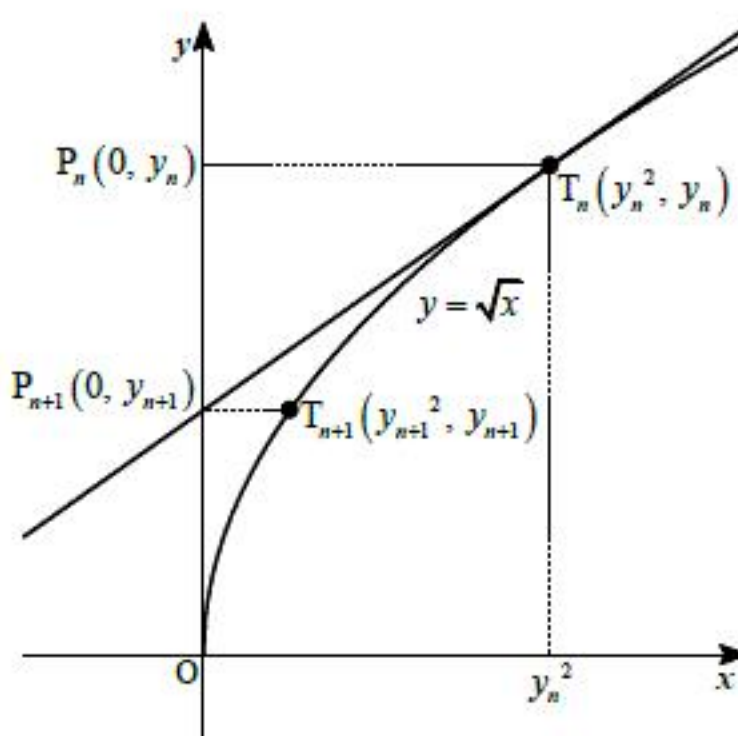
である。よって、点 P_3, T_3 は

$$P_3\left(0, \frac{1}{4}\right), T_3\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), T_3\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

(2)



点 P_n, T_n の座標を $P_n(0, y_n), T_n(y_n^2, y_n) (y_n > 0)$ とおく。直線 T_nP_{n+1} は点 (y_n^2, y_n) における曲線 C の接線であるから、その方程式は、

$$y = \frac{1}{2\sqrt{y_n^2}}(x - y_n^2) + y_n$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2y_n}x + \frac{1}{2}y_n$$

である。よって、点 P_{n+1} の座標は

$$P_{n+1}\left(0, \frac{1}{2}y_n\right)$$

となるから、漸化式

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n & (n=1, 2, 3, \dots) \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。これを解くことで

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となるから、点 P_n, T_n の座標は

$$P_n\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), T_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_n\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), T_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

(3)

$\triangle T_nP_nP_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}P_nP_{n+1} \cdot P_nT_n$$

$$= \frac{1}{2}(y_n - y_{n+1})y_n^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1}$$

と求まる。したがって、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 、公比 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ の無限等比級数であることがわかるから、この値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{2}{7}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2}{7}$$

(1)

与えられた定積分を、部分積分法を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\int_a^x (\sin x - \cos x) e^{-x} dx &= \int_a^x \sin x e^{-x} dx - \int_a^x \cos x e^{-x} dx \\ &= \left[-\sin x e^{-x} \right]_a^x + \int_a^x \cos x e^{-x} dx - \int_a^x \cos x e^{-x} dx \\ &= e^{-a} \sin a\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_a^x (\sin x - \cos x) e^{-x} dx = e^{-a} \sin a$$

(2)

与えられた定積分を、部分積分法を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\int_a^x (f(x) - f''(x)) e^{-x} dx &= \int_a^x f(x) e^{-x} dx - \int_a^x f''(x) e^{-x} dx \\ &= \left[-f(x) e^{-x} \right]_a^x + \int_a^x f'(x) e^{-x} dx - \int_a^x f''(x) e^{-x} dx \\ &= -f(\pi) e^{-\pi} + f(a) e^{-a} + \left[-f'(x) e^{-x} \right]_a^x + \int_a^x f''(x) e^{-x} dx - \int_a^x f''(x) e^{-x} dx \\ &= -f(\pi) e^{-\pi} + f(a) e^{-a} - f'(\pi) e^{-\pi} + f'(a) e^{-a} \\ &= (f(a) + f'(a)) e^{-a} \quad (\because f(\pi) = f'(\pi) = 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_a^x (f(x) - f''(x)) e^{-x} dx = (f(a) + f'(a)) e^{-a}$$

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) (n=1, 2, 3, \dots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考える。

(1)

$a_1 > 0$ であり、漸化式の形から $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} > 0$ であるから、帰納的にすべての自然数 n について $a_n > 0$ であることがわかる。したがって、相加平均と相乗平均に関する不等式より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) \\ &\geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{3}{a_{n-1}}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となることがわかる。また、 $a_1 = 2 \geq \sqrt{3}$ であるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた漸化式を変形すると、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) - \sqrt{3} \\ &= \frac{(a_{n-1} - \sqrt{3})^2}{2a_{n-1}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2a_{n-1}} \right) (a_{n-1} - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)より $a_n - \sqrt{3} \geq 0$ であることに加え、これより

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2a_n} < \frac{1}{2}$$

であるから、不等式

$$a_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2} (a_{n-1} - \sqrt{3}) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。したがって、①を繰り返し用いることで、帰納的に

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3} &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (2 - \sqrt{3}) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

となることが示された。これは $n=1$ のときも成立する。

(証明終)

(3)

与えられた不等式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2^{n-1}} &< \frac{1}{10^{10}} \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &> 10^{10} (2 - \sqrt{3}) = 10^{10} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。②の不等式について、両辺底が 10 の対数をとると、

$$\begin{aligned} (n-1) \log_{10} 2 &> 10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow (n-1) &> \frac{10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3})}{\log_{10} 2} \\ \Leftrightarrow n &> \frac{10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3})}{\log_{10} 2} + 1 = \frac{10 - 0.57}{0.30} + 1 = 32.43 \dots \end{aligned}$$

となるから、題意を満たす最小の自然数 n は $n=33$ であることがわかる。

(答) $n=33$

5

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。点 P は辺 AB を $m:n$ に内分する点であるから、 $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

と表せる。よって、 $\overrightarrow{OQ}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができ、また、点 R は直線 OQ 上の点であるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n} t\vec{a} + \frac{m}{m+n} t\vec{b} + t\vec{c}$$

と表せる。ここで、点 R が 3 点 A, B, C を通る平面上の点であることから、各ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数の和は 1 になるため、

$$\begin{aligned} \frac{n}{m+n} t + \frac{m}{m+n} t + t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GR} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BR} - \overrightarrow{BG}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BG} \right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n}{m+n} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OB} \right) - \overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{3} \right\} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{BA} \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} \right) |\overrightarrow{AB}|^2 \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 $|\overrightarrow{AB}|^2 \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3n &= 2(m+n) \\ \Leftrightarrow n &= 2m \\ \therefore m:n &= 1:2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $m:n = 1:2$