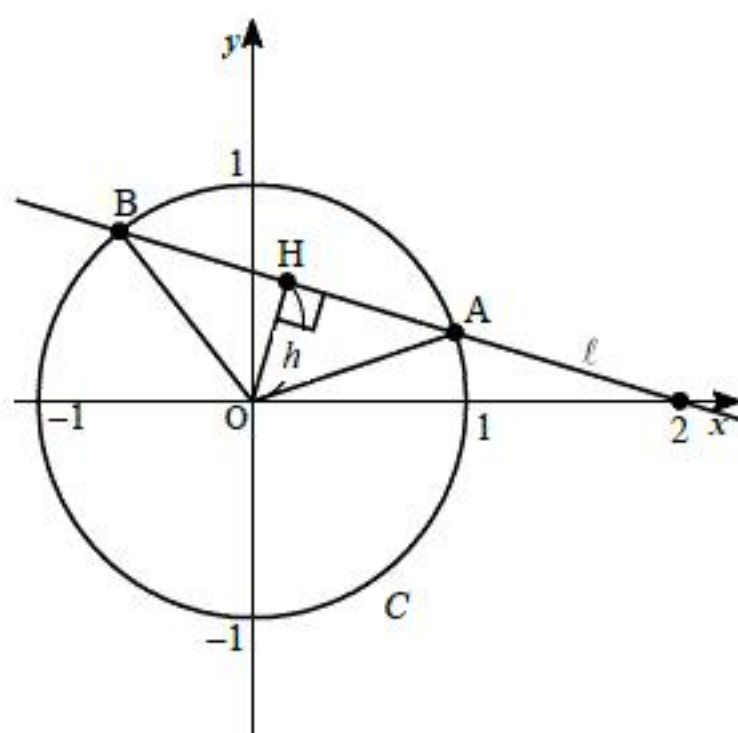


1

(1)



直線  $\ell$  を表す式は

$$y = m(x-2)$$

$$\Leftrightarrow mx - y - 2m = 0$$

であるから、原点  $O$  と  $\ell$  の距離を  $h$  とすると、点と直線の距離公式より

$$h = \frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。よって、直線  $\ell$  と円  $C$  が異なる 2 点で交わるための条件は

$$h < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2|m| < \sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 < 1+m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

と求まる。

(答)  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

三平方の定理より、

$$AH^2 = OA^2 - OH^2$$

$$= 1 - h^2$$

$$= \frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}$$

$$\therefore AH = \sqrt{\frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}}$$

であり、 $AB = 2AH$  であるから、 $\triangle OAB$  の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH$$

$$= AH \cdot OH$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 3m^2}{1 + m^2}} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$= \frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{1 + m^2}$$

と求まる。

(答)  $\frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{1 + m^2}$

(3)

直線  $\ell$  と曲線  $C$  の交点  $A, B$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とすると、 $\alpha, \beta$  は 2 次方程式

$$x^2 + \{m(x-2)\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 - 4m^2x + (4m^2 - 1) = 0$$

の解であるから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{4m^2}{m^2 + 1}, \alpha\beta = \frac{4m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

が成立する。各点の座標は  $A(\alpha, m(\alpha-2)), B(\beta, m(\beta-2))$  であるから、

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \alpha\beta + m^2(\alpha-2)(\beta-2)$$

$$= (m^2 + 1)\alpha\beta - 2m^2(\alpha + \beta) + 4m^2$$

$$= (m^2 + 1)\frac{4m^2 - 1}{m^2 + 1} - 2m^2 \frac{4m^2}{m^2 + 1} + 4m^2$$

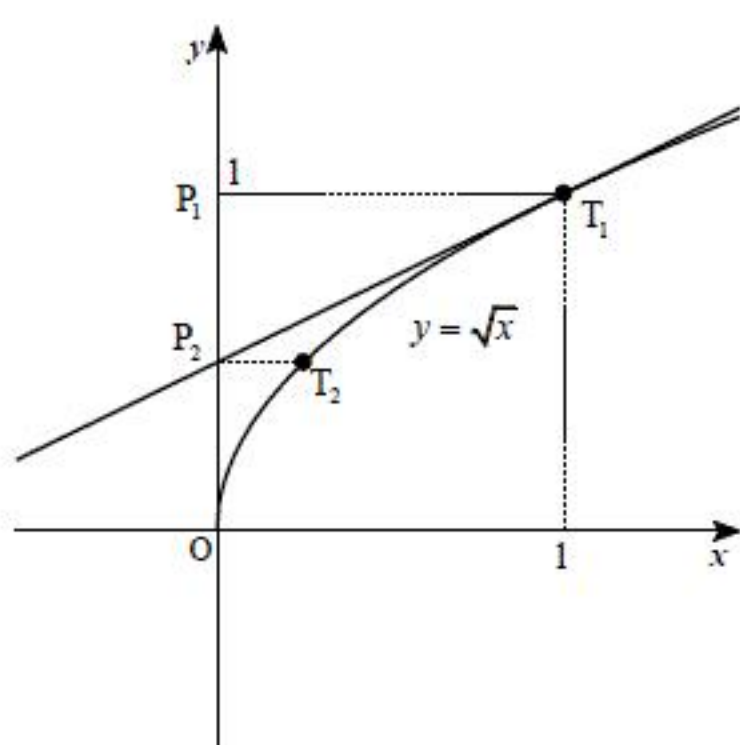
$$= \frac{7m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

と求まる。

(答)  $\frac{7m^2 - 1}{m^2 + 1}$

2

(1)



与えられた関数  $y = \sqrt{x}$  を微分すると、

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となり、直線  $T_1P_1$  は点  $(1, 1)$  における曲線  $C$  の接線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)+1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。よって、点  $P_2, T_2$  は

$$P_2\left(0, \frac{1}{2}\right), T_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。また、直線  $T_2P_3$  は点  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  における曲線  $C$  の接線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

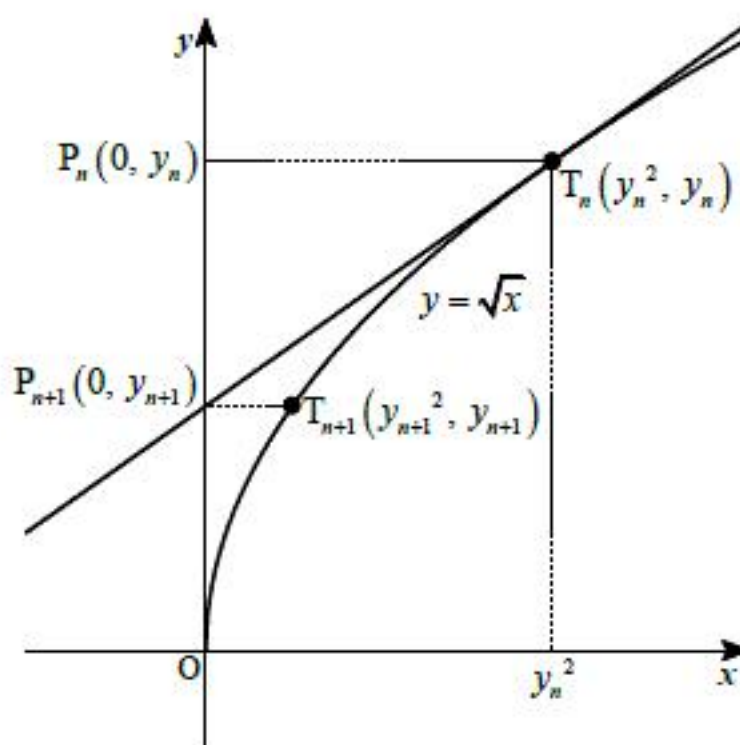
である。よって、点  $P_3, T_3$  は

$$P_3\left(0, \frac{1}{4}\right), T_3\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), T_3\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

(2)



点  $P_n, T_n$  の座標を  $P_n(0, y_n), T_n(y_n^2, y_n) (y_n > 0)$  とおく。直線  $T_nP_{n+1}$  は点  $(y_n^2, y_n)$  における曲線  $C$  の接線であるから、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\sqrt{y_n^2}}(x - y_n^2) + y_n \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2y_n}x + \frac{1}{2}y_n \end{aligned}$$

である。よって、点  $P_{n+1}$  の座標は

$$P_{n+1}\left(0, \frac{1}{2}y_n\right)$$

となるから、漸化式

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。これを解くことで

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となるから、点  $P_n, T_n$  の座標は

$$P_n\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), T_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P_n\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), T_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

(3)

$\triangle T_nP_nP_{n+1}$  の面積  $S_n$  は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}P_nP_{n+1} \cdot P_nT_n \\ &= \frac{1}{2}(y_n - y_{n+1})y_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  は初項  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 、公比  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$  の無限等比級数であることがわかるから、この値は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2}{7}$$



3

(1)

与えられた関数  $f(x) = 2^x - 2^{-x} - \frac{1}{2}x$  を微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^x \log 2 - 2^{-x} \log 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \\ &= \log 2 (2^x + 2^{-x}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、相加平均と相乗平均に関する不等式より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

であるから,

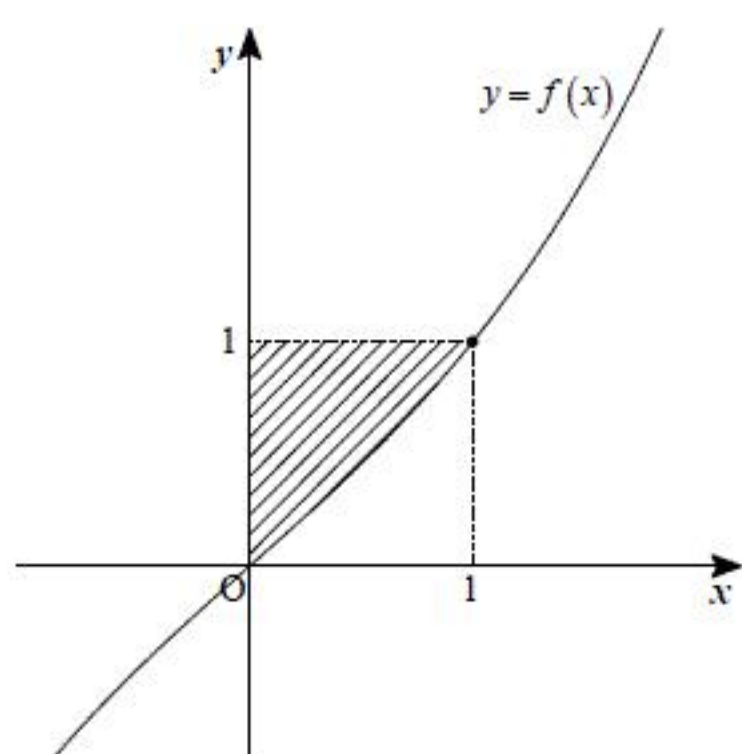
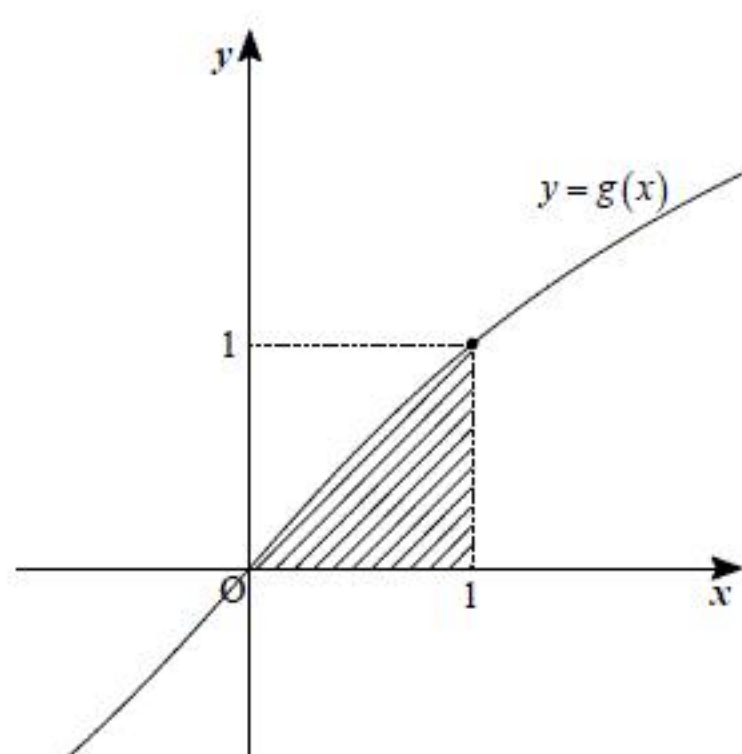
$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 2\log 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{16}{e} \\ &> 0 \quad (\because 0 < e < 16) \end{aligned}$$

となる。したがって、すべての実数  $x$  に対して  $f'(x) > 0$  であるから、 $f(x)$  はつねに増加することが示された。

(証明終)

(2)

関数  $g(x)$  は  $f(x)$  の逆関数であるから、曲線  $y = g(x)$  と 2 直線  $y = 0, x = 1$  で囲まれる部分を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は、曲線  $y = f(x)$  と 2 直線  $x = 0, y = 1$  で囲まれる部分を  $y$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積と等しい。



また、 $f(0) = 0, f(1) = 1$  であり、(1)より  $f(x)$  はつねに増加することに注意すると、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=1} \pi x^2 dy &= \pi \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2 \left\{ \log 2 (2^x + 2^{-x}) - \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \pi \log 2 \int_0^1 x^2 (2^x + 2^{-x}) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx \end{aligned}$$

と立式できる。ここで、 $C$  を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} \int x^2 (2^x + 2^{-x}) dx &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{\log 2} \int x (2^x - 2^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^2} \int (2^x + 2^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^3} (2^x - 2^{-x}) + C \end{aligned}$$

となるから、求める体積は

$$\begin{aligned} &\pi \log 2 \int_0^1 x^2 (2^x + 2^{-x}) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx \\ &= \pi \log 2 \left[ \frac{1}{\log 2} x^2 (2^x - 2^{-x}) - \frac{2}{(\log 2)^2} x (2^x + 2^{-x}) + \frac{2}{(\log 2)^3} (2^x - 2^{-x}) \right]_0^1 - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \pi \log 2 \left( \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{(\log 2)^2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{(\log 2)^3} \cdot \frac{3}{2} \right) - \frac{\pi}{6} \\ &= \pi \left\{ \frac{4}{3} - \frac{5}{\log 2} + \frac{3}{(\log 2)^2} \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \pi \left\{ \frac{4}{3} - \frac{5}{\log 2} + \frac{3}{(\log 2)^2} \right\}$$

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right) (n=1, 2, 3, \dots)$  を満たす数列  $\{a_n\}$  について考える。

(1)

$a_1 > 0$  であり、漸化式の形から  $a_n > 0$  ならば  $a_{n+1} > 0$  であるから、帰納的にすべての自然数  $n$  について  $a_n > 0$  であることがわかる。したがって、相加平均と相乗平均に関する不等式より、 $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) \\ &\geq \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{3}{a_{n-1}}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となることがわかる。また、 $a_1 = 2 \geq \sqrt{3}$  であるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

与えられた漸化式を変形すると、 $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right) - \sqrt{3} \\ &= \frac{(a_{n-1} - \sqrt{3})^2}{2a_{n-1}} \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2a_{n-1}} \right) (a_{n-1} - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)より  $a_n - \sqrt{3} \geq 0$  であることに加え、これより

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2a_n} < \frac{1}{2}$$

であるから、不等式

$$a_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2} (a_{n-1} - \sqrt{3}) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。したがって、 $\textcircled{1}$ を繰り返し用いることで、帰納的に

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{3} &\leq \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}) \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} (2 - \sqrt{3}) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

となることが示された。これは  $n=1$  のときも成立する。

(証明終)

(3)

与えられた不等式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2^{n-1}} &< \frac{1}{10^{10}} \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &> 10^{10} (2 - \sqrt{3}) = 10^{10} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。②の不等式について、両辺底が10の対数をとると、

$$\begin{aligned} (n-1) \log_{10} 2 &> 10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow (n-1) &> \frac{10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3})}{\log_{10} 2} \\ \Leftrightarrow n &> \frac{10 - \log_{10} (2 + \sqrt{3})}{\log_{10} 2} + 1 = \frac{10 - 0.57}{0.30} + 1 = 32.43 \dots \end{aligned}$$

となるから、題意を満たす最小の自然数  $n$  は  $n=33$  であることがわかる。

(答)  $n=33$



(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおく。点 P は辺 AB を  $m:n$  に内分する点であるから、 $\overrightarrow{OP}$  は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

と表せる。よって、 $\overrightarrow{OQ}$  は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができ、また、点 R は直線 OQ 上の点であるから、実数  $t$  を用いて

$$\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n} t\vec{a} + \frac{m}{m+n} t\vec{b} + t\vec{c}$$

と表せる。ここで、点 R が 3 点 A, B, C を通る平面上の点であることから、各ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  の係数の和は 1 になるため、

$$\begin{aligned} \frac{n}{m+n} t + \frac{m}{m+n} t + t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GR} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BR} - \overrightarrow{BG}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BG} \right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{n}{m+n} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OB} \right) - \overrightarrow{OB} - \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{3} \right\} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{BA} \quad (\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0) \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} \right) |\overrightarrow{AB}|^2 \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 $|\overrightarrow{AB}|^2 \neq 0$  であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m+n} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3n &= 2(m+n) \\ \Leftrightarrow n &= 2m \\ \therefore m:n &= 1:2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答)  $m:n=1:2$