

'07

前期日程

数 学 問 題

(教育学部)

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子には問題 5 題で、5 枚の答案用紙があります。問題に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
3. 受験番号はすべての答案用紙の所定の欄に必ず記入してください。
4. 5 枚の答案用紙のみを回収するので、この表紙は持ち帰ってください。
5. 裏面は計算等の下書きに使用してもよいが、解答は各問題の下の解答欄に書き、裏面は使用しないでください。裏面に解答してもその部分は採点しません。

数 学

1 原点 O を中心とする半径 1 の円を C , 点 $(2, 0)$ を通り傾き m の直線を ℓ とする. ℓ と C が異なる 2 点 A, B で交わる
とき

- (1) m の値の範囲を求めよ.
- (2) $\triangle OAB$ の面積を m を用いて表せ.
- (3) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を m を用いて表せ.

[解答欄]

数 学

2 曲線 $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) を C とし, 点 $(0, 1)$ を P_1 , 点 $(1, 1)$ を T_1 とおく. T_1 における C の接線が y 軸と交わる点を P_2 とおき, P_2 を通り x 軸に平行な直線が C と交わる点を T_2 とおく. T_2 における C の接線が y 軸と交わる点を P_3 とおき, P_3 を通り x 軸に平行な直線が C と交わる点を T_3 とおく. 以下, この操作を続け y 軸上に点列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ をとり, C 上に点列 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ をとる.

(1) T_2 と T_3 の座標を求めよ.

(2) P_n と T_n の座標を n を用いて表せ.

(3) $\triangle T_n P_n P_{n+1}$ の面積を S_n とするとき $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ.

[解答欄]

数 学

3

関数 $f(x) = 2^x - 2^{-x} - \frac{1}{2}x$ について

(1) $f(x)$ はつねに増加することを示せ.

(2) $0 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とするとき, 曲線 $y = g(x)$ と 2 直線 $y = 0, x = 1$ で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

[解答欄]

数 学

4 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について

(1) $a_n \geq \sqrt{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ.

(2) $a_n - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ.

(3) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2^{n-1}} < \frac{1}{10^{10}}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし $\log_{10} 2 = 0.30, \log_{10}(2 + \sqrt{3}) = 0.57$ とする.

[解答欄]

数 学

5 4面体 $OABC$ の辺 AB を $m:n$ に内分する点 P に対して $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PQ}$ を満たす点 Q をとる. 3点 A, B, C を通る平面と直線 OQ との交点を R とする.

(1) $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$ であることを示せ.

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とする. 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GR}$ がともに 0 のとき, 比 $m:n$ を求めよ.

[解答欄]