**1**

(1)

$C$ と $\ell_1$ が接するから，方程式

$$ax^2+b=x$$
$$\Leftrightarrow ax^2-x+b=0$$

が重解を持つ。よって上式の判別式が 0 となるから

$$\therefore b=\frac{1}{4a}(\because a>0)$$

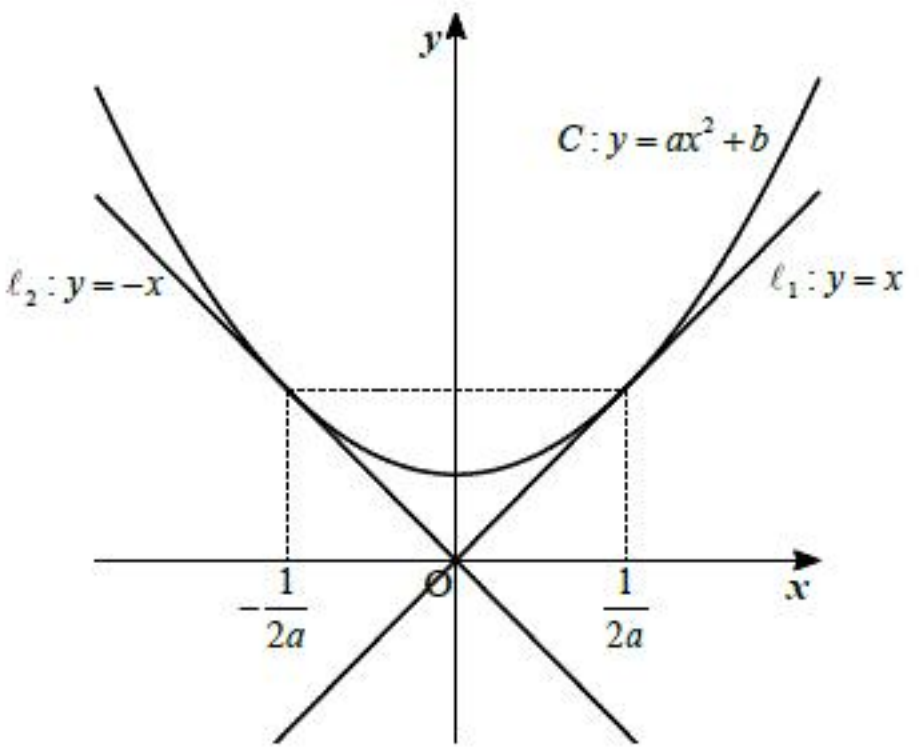
を得る。このとき，

$$ax^2+b=-x$$
$$\Leftrightarrow ax^2+x+\frac{1}{4a}=0$$
$$\Leftrightarrow a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2=0$$
$$\therefore x=-\frac{1}{2a}$$

となるから，$C$ と $\ell_2$ も接する。よって求める値は

$$b=\frac{1}{4a}$$

である。




(2)

$T_1$ の座標は

$$\begin{cases} y=ax^2+\dfrac{1}{4a} \\ y=x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-x+\dfrac{1}{4a}=0 \\ y=x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2=0 \\ y=x \end{cases}$$
$$\therefore (x,\ y)=\left(\frac{1}{2a},\ \frac{1}{2a}\right)$$

である。同様にして $T_2$ の座標は $\left(-\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{1}{2a}\right)$ であるから，$\triangle OT_1T_2$ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{2a}\right)\right|=\frac{1}{4a^2}$$

である。また，$C$ と直線 $T_1T_2$ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{a}{6}\left\{\frac{1}{2a}-\left(-\frac{1}{2a}\right)\right\}^3=\frac{1}{6a^2}$$

であるから，求める面積は

$$\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{6a^2}=\frac{1}{12a^2}$$

である。

(答) $\dfrac{1}{12a^2}$

(3)

点 P の $x$ 座標を $t$ とする。$C$ について

$$y'=2ax$$

であるから，P における $C$ の接線の方程式は

$$y=2at(x-t)+at^2+\frac{1}{4a}$$
$$\Leftrightarrow y=2atx-at^2+\frac{1}{4a} \quad \cdots ①$$

である。よって $\ell_1$ の方程式と①を連立して

$$\begin{cases} y=2atx-at^2+\dfrac{1}{4a} \\ y=x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2atx=y+at^2-\dfrac{1}{4a} \\ 2atx=2aty \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2aty_1=y_1+\frac{4a^2t^2-1}{4a}$$
$$\Leftrightarrow (2at-1)y_1=\frac{4a^2t^2-1}{4a}$$

となるが，$P\neq T_1$ であるから $t\neq\dfrac{1}{2a}$，つまり $2at-1=0$ であるので

$$y_1=\frac{2at+1}{4a}$$

を得る。同様にして $\ell_2$ の方程式と①を連立して解くことで

$$y_2=\frac{-2at+1}{4a}$$

を得る。よって

$$y_1+y_2=\frac{2at+1}{4a}+\frac{-2at+1}{4a}$$
$$=\frac{1}{4a}$$

となり，$y_1+y_2$ の値は P の取り方によらず一定であることが示された。

(証明終)

## 2

(1)

仮定より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2\\&=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2\left(\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\sqrt{5},\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=2\right)$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

を得る。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2)

実数$k$を用いて$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}$と表すと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}&=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\\&=k\vec{a}-\vec{b}\end{aligned}$$

となる。ここで仮定より$\overrightarrow{BP}$と$\overrightarrow{OA}$は垂直であるから, その内積は0なので

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$$

$$\Leftrightarrow k\left|\vec{a}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow 5k-3=0$$

$$\therefore k=\frac{3}{5}$$

を得る。

(答) $k=\frac{3}{5}$

(3)

直線OQとABの交点をHとする。△OABは二等辺三角形であるから, Hは辺ABの中点である。これと(2)を合わせて

$$\begin{cases}\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=3:2\\\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=1:1\end{cases}$$

が成り立つから, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AO}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{BH}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{PQ}}\cdot 1=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{PQ}}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \mathrm{PQ}:\mathrm{QB}=3:5$$

を得る。よって(2)を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ}&=\frac{5}{8}\overrightarrow{BP}\\&=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\frac{3}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}\\&=\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}\\&=\frac{3}{8}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\end{aligned}$$

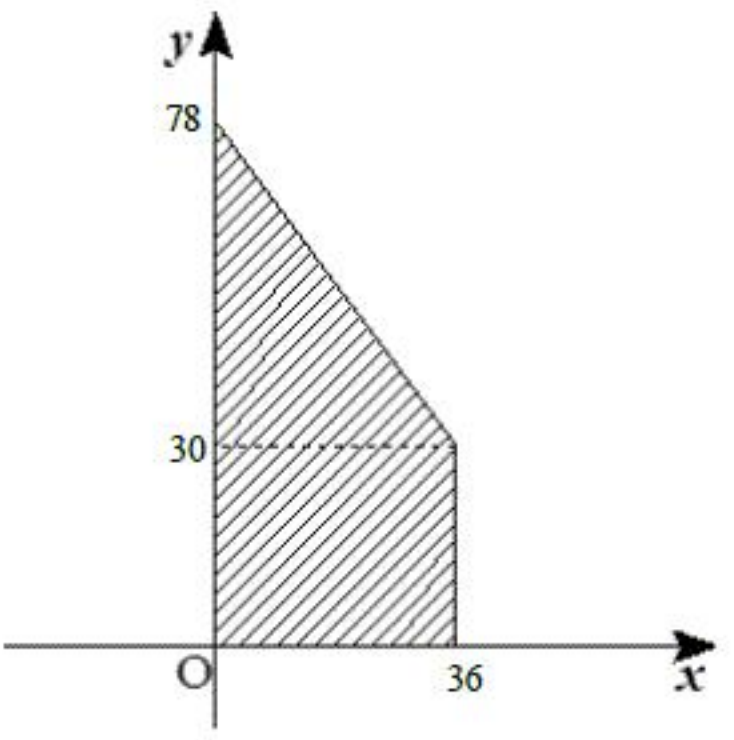
を得る。

(答) $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

3

(1)

下図の領域内の整数点の個数を求めればよい。ただし境界は全て含まない。




領域内の整数点で，直線 $x=k(0 \leqq k \leqq 36)$ 上にある点の個数を考える。

[1] $k=3m\,(0 \leqq m \leqq 12)$のとき

$x=k$ 上にある整数点の個数は

$-4m+79$ (個)

である。

[2] $k=3m+1\,(0 \leqq m \leqq 11)$のとき

$x=k$ 上にある整数点の個数は

$-4m+77$ (個)

である。

[3] ] $k=3m+2\,(0 \leqq m \leqq 11)$のとき

$x=k$ 上にある整数点の個数は

$-4m+76$ (個)

である。

以上[1]～[3]より，求める点の個数は

$$\sum_{m=0}^{12}(-4m+79)+\sum_{m=0}^{11}(-4m+77)+\sum_{m=0}^{11}(-4m+76)=\sum_{m=0}^{11}(-12m+232)-4\cdot 12+79$$

$$=-12+\frac{11\cdot 12}{2}+232\cdot 12+31$$

$$=2023$$

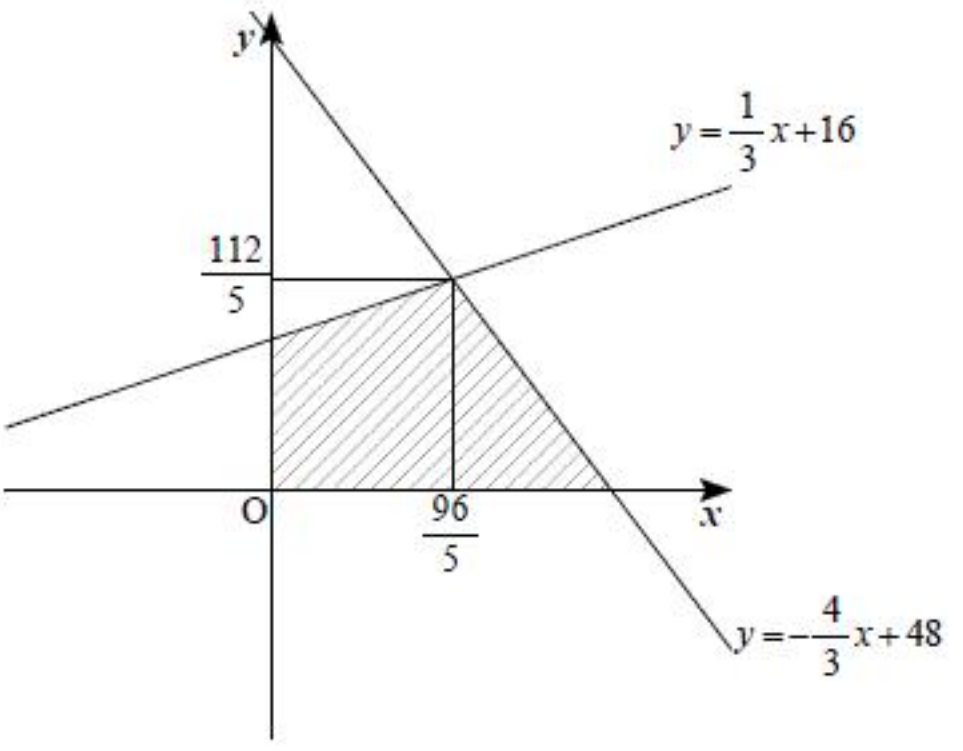
である。

(2)

$$4x+3y=144 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+48 \quad \cdots ①$$

$$-x+3y=48 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+16 \quad \cdots ②$$

であるので，領域 $D$ を図示すると下図の斜線部になる(境界は含まない)。なお，①と②の交点は$\left(\frac{96}{5}, \frac{112}{5}\right)$である。




$19<\frac{96}{5}<20$ であることに注意し，整数点 $(x, y) \in D$ に対する，$x+3y$ の値について，次の 4 つに場合分けをして考える。

[1] $x \leqq 18$ のとき

$x+1 \leqq 19<\frac{96}{5}$ であり，②の傾き $\frac{1}{3}$ が正であることから，$(x+1, y) \in D$ である。そして，

$$x+3y<(x+1)+3y$$

であるから，$x \leqq 18$ では，$x+3y$ は最大値を取らないことがわかる。

[2] $x=19$ のとき

②式より，$y<\frac{1}{3}\cdot 19+16=22\frac{1}{3}$ であるから，$y$ は 22 以下の整数を取り得る。$x+3y$ の値を最大にするのは $y=22$ のときで，このとき，$x+3y=85$ である。

[3] $x=20$ のとき

①式より，$y<-\frac{4}{3}\cdot 20+48=21\frac{1}{3}$ であるから，$y$ は 21 以下の整数を取り得る。$x+3y$ の値を最大にするのは $y=21$ のときで，このとき，$x+3y=83$ である。

[4] $x \geqq 21$ のとき

$x-1 \geqq 20>\frac{96}{5}$ であり，①の傾き $-\frac{4}{3}$ が $-1$ より小さいので，$(x-1, y+1) \in D$ である。そして，

$$x+3y<(x-1)+3(y+1)$$

であるから，$x \geqq 21$ では，$x+3y$ は最大値を取らないことがわかる。

以上，[1]から[4]より，$x+3y$ の最大値は，$(x, y)=(19, 22)$ のときの 85 である。

(答) 85

## 4

(1)

$x=0$ は $|x+1|>|x-1|>|x-2|$ を満たさないが $-1<x<2$ を満たす。また $x=2$ は $|x+1|>|x-1|>|x-2|$ を満たすが $-1<x<2$ を満たさない。よって $|x+1|>|x-1|>|x-2|$ は $-1<x<2$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(答) 必要条件でも十分条件でもない

(2)

$$|x+1|<|x-1|<|x-2|$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2<(x-1)^2<(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2<(x-1)^2 \text{ かつ } (x-1)^2<(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x<0 \text{ かつ } x<\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x<0$$

である。よって $|x+1|<|x-1|<|x-2| \Rightarrow x<-1$ は成り立たないが逆は成り立つので，$|x+1|<|x-1|<|x-2|$ は $x<-1$ であるための必要条件である。

(答) 必要条件である

5

(1)

$$I(m,0)=\int_a^b (x-a)^m\,dx$$
$$=\frac{1}{m+1}\left[(x-a)^{m+1}\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{m+1}(b-a)^{m+1}$$

$$I(1,1)=\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\int_a^b \left\{(x-b)^2-(a-b)(x-b)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-b)^3-\frac{a-b}{2}(x-b)^2\right]_a^b$$
$$=-\frac{1}{3}(a-b)^3+\frac{a-b}{2}(a-b)^2$$
$$=\frac{1}{6}(a-b)^3$$

となる。

(答) $I(m,0)=\frac{1}{m+1}(b-a)^{m+1}$, $I(1,1)=\frac{1}{6}(a-b)^3$

(2)

$$I(m,n)=\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\,dx$$
$$=\frac{1}{m+1}\left[(x-a)^{m+1}(x-b)^n\right]_a^b-\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$$
$$=-\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)(\because n>0,\ m+1>0)$$

となる。

(答) $I(m,n)=-\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$

(3)

(1)と(2)の結果を用いることで

$$I(5,5)=-\frac{5}{6}I(6,4)$$
$$=\left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)I(10,0)$$
$$=-\frac{1}{252}\cdot\frac{1}{11}(b-a)^{11}$$
$$=-\frac{1}{2772}(b-a)^{11}$$

となる。

(答) $I(5,5)=-\frac{1}{2772}(b-a)^{11}$