

(1)

2点A, Bを通る直線の方程式は

$$y = \frac{3-1}{2-0}x+1$$

$$\therefore y = x+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。放物線と線分ABが異なる2点で交わる時、方程式

$$x^2+ax+2=x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+(a-1)x+1=0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が $0 \leq x \leq 2$ に異なる2解をもつ。

$$f(x) = x^2 + (a-1)x + 1$$

$$= \left\{x + \frac{a-1}{2}\right\}^2 + 1 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

とおき、 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、その条件は

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \\ 0 \leq -\frac{a-1}{2} \leq 2 \end{cases}$$

となり、これを整理すると

$$\begin{cases} a < -1, 3 < a \\ 0 \leq 1 \\ -\frac{3}{2} \leq a \\ -3 < a < 1 \end{cases}$$

となるから、求める範囲は

$$-\frac{3}{2} \leq a < -1$$

となる。

(答) $-\frac{3}{2} \leq a < -1$

C_2 の方程式は

$$-y = \frac{64}{9}(-x)^2 + 2(-x) - p$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{64}{9}x^2 + 2x + p$$

であるから、 C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$\frac{64}{9}x^2 + 2x - p = -\frac{64}{9}x^2 + 2x + p$$

$$\Leftrightarrow \frac{128}{9}x^2 - 2p = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow (8x - 3\sqrt{p})(8x + 3\sqrt{p}) = 0$$

$$\therefore x = \pm \frac{3}{8}\sqrt{p}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ 式より C_1, C_2 が交点を持つとき $p > 0$ となる。ここで $\alpha = \frac{3}{8}\sqrt{p}$ とおくと

C_1, C_2 が囲む部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \left(-\frac{64}{9}x^2 + 2x + p \right) - \left(\frac{64}{9}x^2 + 2x - p \right) \right\} dx &= -\frac{128}{9} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x - \alpha)(x + \alpha) dx \\ &= \left(-\frac{1}{6} \right) \left(-\frac{128}{9} \right) (2\alpha)^3 \\ &= \frac{512}{27} \alpha^3 \end{aligned}$$

となる。これが 8 に等しいから

$$\frac{512}{27} \alpha^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p = 4$$

を得る。