

1

(1)

C と l_1 が接するので、 C と l_1 を連立すると、

$$\begin{aligned} ax^2 + b &= x \\ \Leftrightarrow ax^2 - x + b &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、この判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 1 - 4ab = 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b = \frac{1}{4a}$$

(2)

T_1 の x 座標は、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

となる。ここで、求める面積は y 軸に対して対称であるので、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2a}} \left(ax^2 - x + \frac{1}{4a} \right) dx \\ &= 2a \int_0^{\frac{1}{2a}} \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 dx \\ &= 2a \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2a} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2a}} \\ &= \frac{1}{12a^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{12a^2}$$

(3)

実数 α を用いて点 P を $(\alpha, a\alpha^2 + b)$ とすると、点 P における接線は、

$$\begin{aligned} y &= 2a\alpha(x - \alpha) + a\alpha^2 + b \\ &= 2a\alpha x - a\alpha^2 + b \end{aligned}$$

となる。これと l_1 との交点 Q_1 の x 座標は、

$$\begin{aligned} 2a\alpha x - a\alpha^2 + b &= x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha - 1} \end{aligned}$$

であるので、

$$y_1 = \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha - 1} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。同様にして、 Q_2 の x 座標は、

$$x = \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha + 1}$$

であるので、

$$y_2 = -\frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha + 1} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= (a\alpha^2 - b) \cdot \frac{2}{4a^2\alpha^2 - 1} \\ &= 2 \cdot \frac{a\alpha^2 - \frac{1}{4a}}{4a \left(a\alpha^2 - \frac{1}{4a} \right)} \\ &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

となるので、 $y_1 + y_2$ の値は点 P のとり方によらず一定である。

(証明終)

2

(1)

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = 3$$

(2)

$$\begin{aligned}OP &= OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} \overline{a} \\ &= \frac{3}{5} \overline{a}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overline{OP} = \frac{3}{5} \overline{a}$$

(3)

Q は直線 PB 上の点だから, 実数 m を用いて,

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= m \overline{OP} + (1-m) \overline{OB} \\ &= \frac{3m}{5} \overline{OA} + (1-m) \overline{OB} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

とかける。また, O から AB に下ろした垂線の足を H とすれば, 実数 n を用いて,

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= n \overline{OH} \\ &= \frac{n \overline{OA} + n \overline{OB}}{2} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とも書ける。①と②より,

$$\begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{3m}{5} \\ \frac{n}{2} = 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{8} \\ n = \frac{3}{4} \end{cases}$$

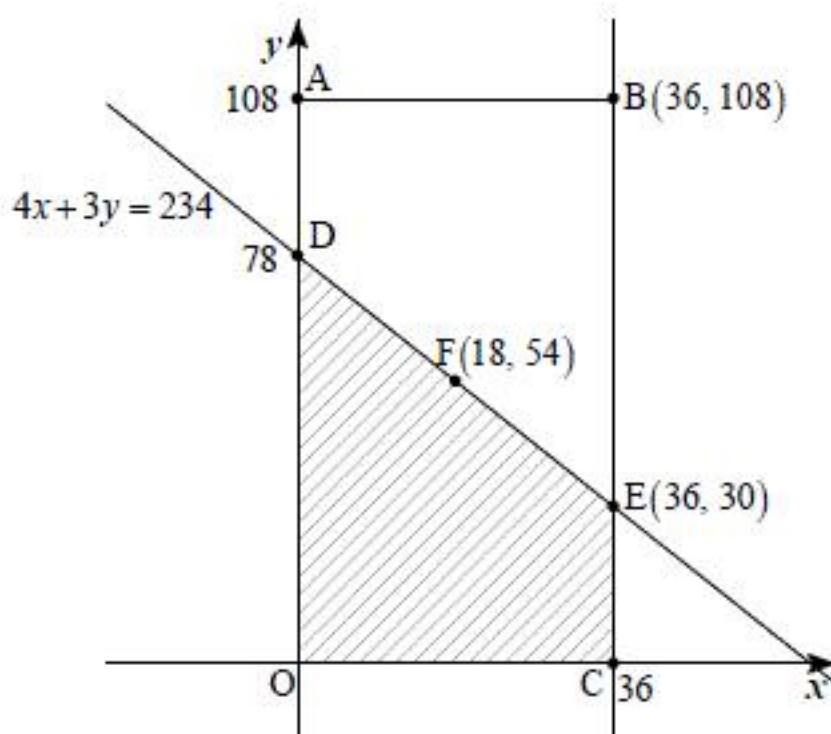
となるから,

$$\overline{OQ} = \frac{3}{8} \overline{a} + \frac{3}{8} \overline{b}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OQ} = \frac{3}{8} \overline{a} + \frac{3}{8} \overline{b}$$

(1)



題意の領域は、上図の斜線部である。長方形 OABC には整数点が、

$$(36+1)(108+1) = 4033 \text{ (個)}$$

あり、線分 DE 上には、13 個の整数点、

$$(3k, -4k + 78) \quad (0 \leq k \leq 12)$$

があるので、長方形 OABC には、線分 DE 上を除いて、

$$4033 - 13 = 4020 \text{ (個)}$$

の整数点がある。長方形は中心 F を中心として、点対称だから、

斜線部(線分 DE 上を除く)に含まれる整数点の個数は、

$$4020 \div 2 = 2010 \text{ (個)}$$

となる。したがって、斜線部全体では、

$$2010 + 13 = 2023 \text{ (個)}$$

の整数点が存在する。

(答) 2023 個

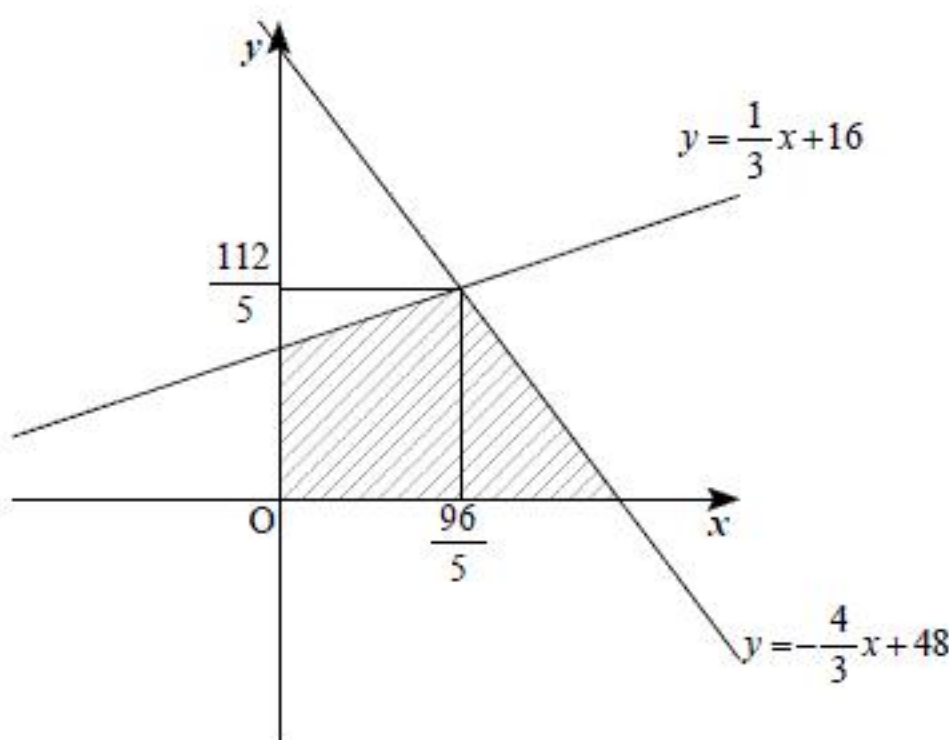
(2)

$$4x + 3y = 144 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 48 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$-x + 3y = 48 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 16 \quad \dots \textcircled{4}$$

であるので、領域 D を図示すると下図の斜線部になる(境界は含まない)。なお、③と④の交点

は $\left(\frac{96}{5}, \frac{112}{5}\right)$ である。



$19 < \frac{96}{5} < 20$ であることに注意し、整数点 $(x, y) \in D$ に対する、 $x+3y$ の値について、次の 4 つに場合分けをして考える。

[1] $x \leq 18$ のとき

$x+1 \leq 19 < \frac{96}{5}$ であり、④の傾き $\frac{1}{3}$ が正であることから、 $(x+1, y) \in D$ である。そして、

$$x+3y < (x+1)+3y$$

であるから、 $x \leq 18$ では、 $x+3y$ は最大値を取らないことがわかる。

[2] $x=19$ のとき

④式より、 $y < \frac{1}{3} \cdot 19 + 16 = 22\frac{1}{3}$ であるから、 y は 22 以下の整数を取り得る。 $x+3y$ の値を最大にするのは $y=22$ のときで、このとき、 $x+3y=85$ である。

[3] $x=20$ のとき

③式より、 $y < -\frac{4}{3} \cdot 20 + 48 = 21\frac{1}{3}$ であるから、 y は 21 以下の整数を取り得る。 $x+3y$ の値を最大にするのは $y=21$ のときで、このとき、 $x+3y=83$ である。

[4] $x \geq 21$ のとき

$x-1 \geq 20 > \frac{96}{5}$ であり、③の傾き $-\frac{4}{3}$ が -1 より小さいので、 $(x-1, y+1) \in D$ である。そして、

$$x+3y < (x-1)+3(y+1)$$

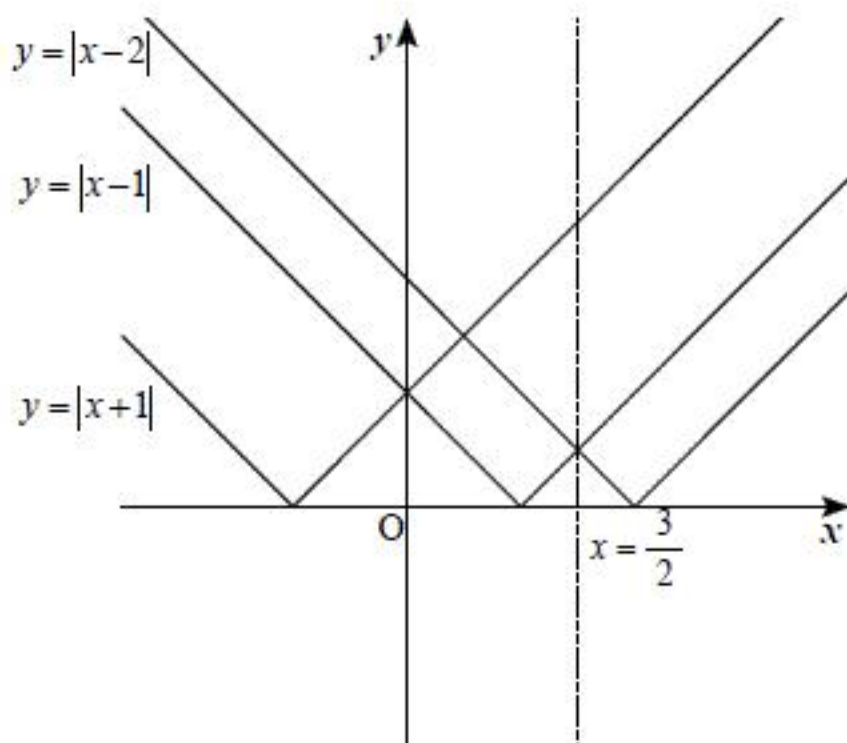
であるから、 $x \geq 21$ では、 $x+3y$ は最大値を取らないことがわかる。

以上、[1]から[4]より、 $x+3y$ の最大値は、 $(x, y) = (19, 22)$ のときの 85 である。

(答) 85

4

$y=|x+1|$, $y=|x-1|$, $y=|x-2|$ を図示すると、下図のようになる。



(1)

上図より、

$$|x+1| > |x-1| > |x-2| \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

であるので、 $|x+1| > |x-1| > |x-2|$ は $-1 < x < 2$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(答) 必要条件でも十分条件でもない

(2)

上図より、

$$|x+1| < |x-1| < |x-2| \Leftrightarrow x < 0$$

であるので、 $|x+1| < |x-1| < |x-2|$ は $x < -1$ であるための必要条件である。

(答) 必要条件である

(1)

与式より,

$$\begin{aligned}
 I(m, 0) &= \int_a^b (x-a)^m dx \\
 &= \left[\frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} \right]_a^b \\
 &= \frac{(b-a)^{m+1}}{m+1} \\
 I(1, 1) &= \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (x-a)^2 (x-b) \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} (x-a)^2 dx \\
 &= - \left[\frac{1}{6} (x-a)^3 \right]_a^b \\
 &= -\frac{1}{6} (b-a)^3
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I(m, 0) = \frac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$$

$$I(1, 1) = -\frac{1}{6} (b-a)^3$$

(2)

$$\begin{aligned}
 I(m, n) &= \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \\
 &= \left[\frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} (x-b)^n \right]_a^b - \frac{n}{m+1} \int_a^b (x-a)^{m+1} (x-b)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I(m, n) = -\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

(3)

(2)を繰り返し用いた後に, (1)の結果を適用することにより,

$$\begin{aligned}
 I(5, 5) &= -\frac{5}{6} I(6, 4) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) I(7, 3) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) I(8, 2) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) I(9, 1) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) \cdot \left(-\frac{1}{10} \right) I(10, 0) \\
 &= -\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{(b-a)^{11}}{11} \\
 &= -\frac{(b-a)^{11}}{2772}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad I(5, 5) = -\frac{(b-a)^{11}}{2772}$$