

# 1

(1)

$C$  と  $l_1$  が接するので、 $C$  と  $l_1$  を連立すると、

$$\begin{aligned} ax^2 + b &= x \\ \Leftrightarrow ax^2 - x + b &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、この判別式を  $D$  とすると、

$$\begin{aligned} D &= 1 - 4ab = 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{1}{4a}$$

(2)

$T_1$  の  $x$  座標は、 $\textcircled{1}$  より、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

となる。ここで、求める面積は  $y$  軸に対して対称であるので、求める面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2a}} \left( ax^2 - x + \frac{1}{4a} \right) dx \\ &= 2a \int_0^{\frac{1}{2a}} \left( x - \frac{1}{2a} \right)^2 dx \\ &= 2a \left[ \frac{1}{3} \left( x - \frac{1}{2a} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2a}} \\ &= \frac{1}{12a^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12a^2}$$

(3)

実数  $\alpha$  を用いて点  $P$  を  $(\alpha, a\alpha^2 + b)$  とすると、点  $P$  における接線は、

$$\begin{aligned} y &= 2a\alpha(x - \alpha) + a\alpha^2 + b \\ &= 2a\alpha x - a\alpha^2 + b \end{aligned}$$

となる。これと  $l_1$  との交点  $Q_1$  の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} 2a\alpha x - a\alpha^2 + b &= x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha - 1} \end{aligned}$$

であるので、

$$y_1 = \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha - 1} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。同様にして、 $Q_2$  の  $x$  座標は、

$$x = \frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha + 1}$$

であるので、

$$y_2 = -\frac{a\alpha^2 - b}{2a\alpha + 1} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

となる。よって、 $\textcircled{2}$  と  $\textcircled{3}$  より、

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= (a\alpha^2 - b) \cdot \frac{2}{4a^2\alpha^2 - 1} \\ &= 2 \cdot \frac{a\alpha^2 - \frac{1}{4a}}{4a \left( a\alpha^2 - \frac{1}{4a} \right)} \\ &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

となるので、 $y_1 + y_2$  の値は点  $P$  のとり方によらず一定である。

(証明終)

**2**

(1)

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3$

(2)

$$\begin{aligned}OP &= OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}} \overrightarrow{a} \\ &= \frac{3}{5} \overrightarrow{a}\end{aligned}$$

である。

(答)  $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5} \overrightarrow{a}$

(3)

Qは直線PB上の点だから、実数 $m$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= m \overrightarrow{OP} + (1-m) \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3m}{5} \overrightarrow{OA} + (1-m) \overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

とかける。また、OからABに下ろした垂線の足をHとすれば、実数 $n$ を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= n \overrightarrow{OH} \\ &= \frac{n \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}}{2} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とも書ける。①と②より、

$$\begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{3m}{5} \\ \frac{n}{2} = 1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{8} \\ n = \frac{3}{4} \end{cases}$$

となるから、

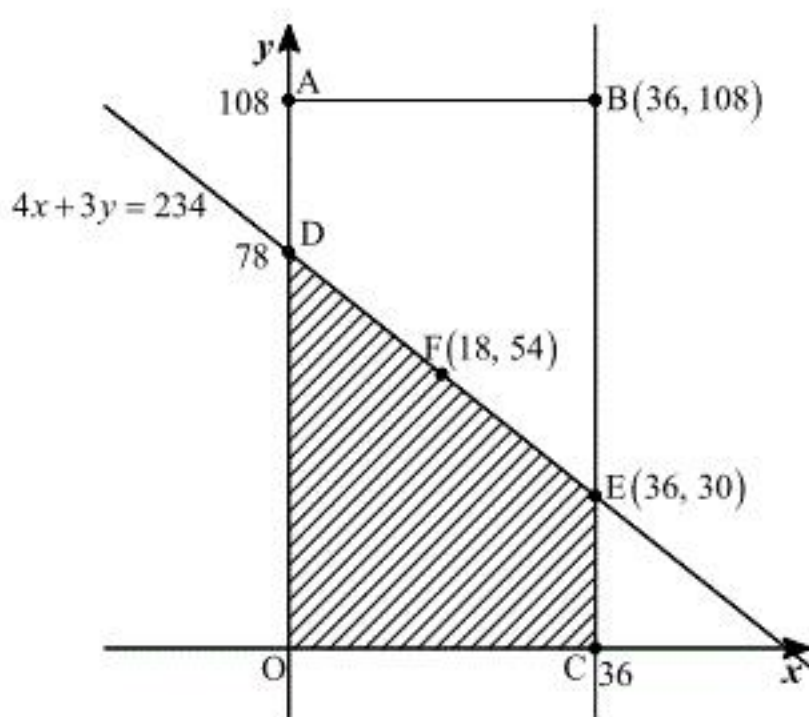
$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{8} \overrightarrow{a} + \frac{3}{8} \overrightarrow{b}$$

と求まる。

(答)  $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{8} \overrightarrow{a} + \frac{3}{8} \overrightarrow{b}$

3

(1)



題意の領域は、上図の斜線部である。長方形 OABC には整数点が、

$$(36+1)(108+1) = 4033 \text{ (個)}$$

あり、線分 DE 上には、13 個の整数点、

$$(3k, -4k + 78) \quad (0 \leq k \leq 12)$$

があるので、長方形 OABC には、線分 DE 上を除いて、

$$4033 - 13 = 4020 \text{ (個)}$$

の整数点がある。長方形は中心 F を中心として、点対称だから、

斜線部(線分 DE 上を除く)に含まれる整数点の個数は、

$$4020 \div 2 = 2010 \text{ (個)}$$

となる。したがって、斜線部全体では、

$$2010 + 13 = 2023 \text{ (個)}$$

の整数点が存在する。

(答) 2023 個

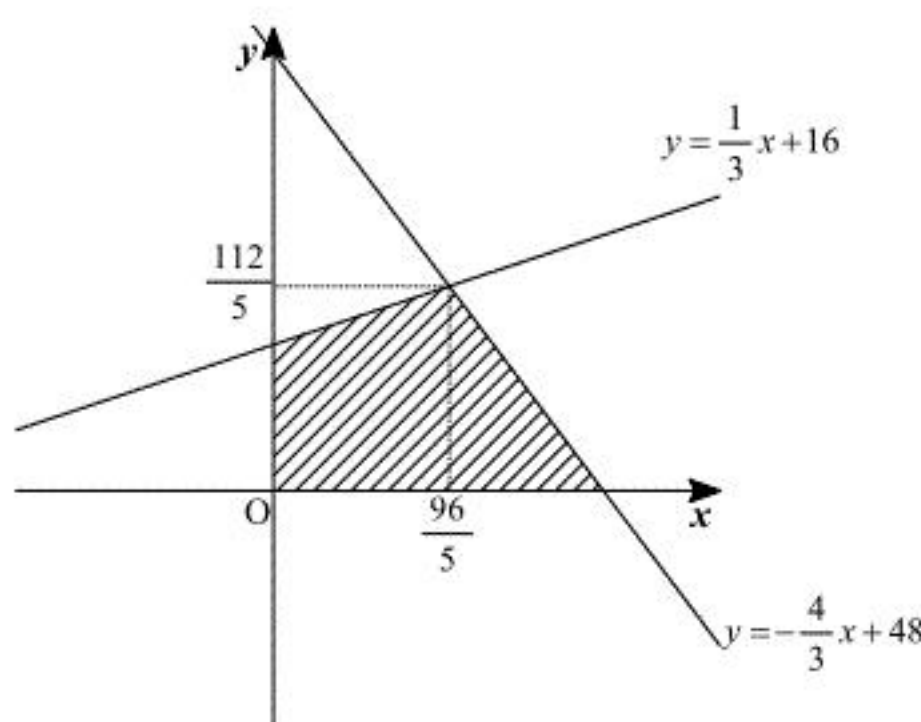
(2)

$$4x + 3y = 144 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + 48 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$-x + 3y = 48 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 16 \quad \dots \textcircled{4}$$

であるので、領域  $D$  を図示すると下図の斜線部になる(境界は含まない)。なお、③と④の交点

は  $\left(\frac{96}{5}, \frac{112}{5}\right)$  である。



$19 < \frac{96}{5} < 20$  であることに注意し、整数点  $(x, y) \in D$  に対する、 $x + 3y$  の値について、次の 4

つに場合分けをして考える。

[1]  $x \leq 18$  のとき

$x+1 \leq 19 < \frac{96}{5}$  であり、④の傾き  $\frac{1}{3}$  が正であることから、 $(x+1, y) \in D$  である。そして、

$$x + 3y < (x+1) + 3y$$

であるから、 $x \leq 18$  では、 $x + 3y$  は最大値を取らないことがわかる。

[2]  $x = 19$  のとき

④式より、 $y < \frac{1}{3} \cdot 19 + 16 = 22\frac{1}{3}$  であるから、 $y$  は 22 以下の整数を取り得る。 $x + 3y$  の値を最大にするのは  $y = 22$  のときで、このとき、 $x + 3y = 85$  である。

[3]  $x = 20$  のとき

③式より、 $y < -\frac{4}{3} \cdot 20 + 48 = 21\frac{1}{3}$  であるから、 $y$  は 21 以下の整数を取り得る。 $x + 3y$  の値を最大にするのは  $y = 21$  のときで、このとき、 $x + 3y = 83$  である。

[4]  $x \geq 21$  のとき

$x-1 \geq 20 > \frac{96}{5}$  であり、③の傾き  $-\frac{4}{3}$  が  $-1$  より小さいので、 $(x-1, y+1) \in D$  である。そして、

$$x + 3y < (x-1) + 3(y+1)$$

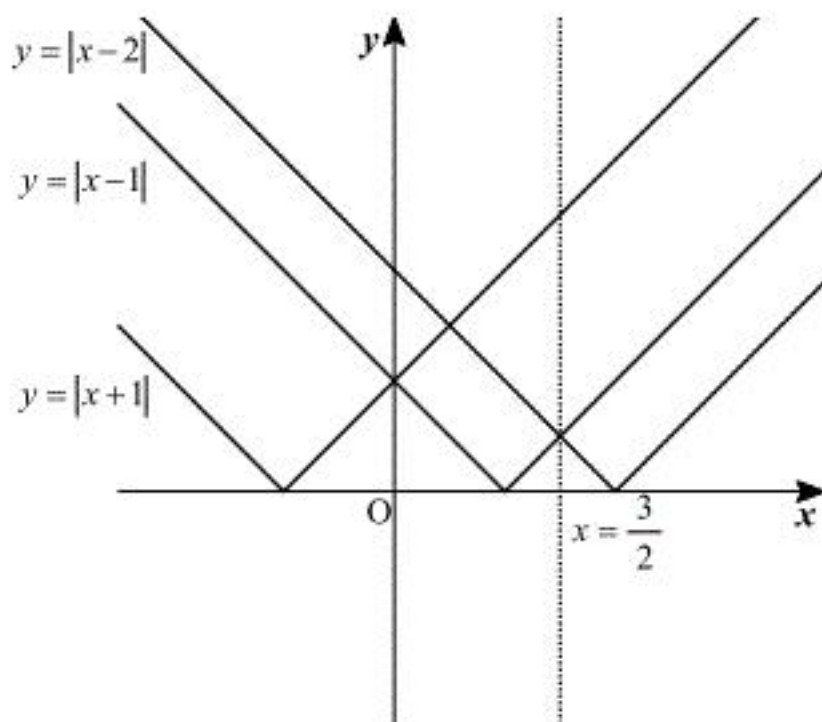
であるから、 $x \geq 21$  では、 $x + 3y$  は最大値を取らないことがわかる。

以上、[1]から[4]より、 $x + 3y$  の最大値は、 $(x, y) = (19, 22)$  のときの 85 である。

(答) 85

4

$y = |x+1|$ ,  $y = |x-1|$ ,  $y = |x-2|$  を図示すると、下図のようになる。



(1)

上図より、

$$|x+1| > |x-1| > |x-2| \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

であるので、 $|x+1| > |x-1| > |x-2|$  は  $-1 < x < 2$  であるための必要条件でも十分条件でもない。

(答) 必要条件でも十分条件でもない

(2)

上図より、

$$|x+1| < |x-1| < |x-2| \Leftrightarrow x < 0$$

であるので、 $|x+1| < |x-1| < |x-2|$  は  $x < -1$  であるための必要条件である。

(答) 必要条件である

(1)

与式より,

$$\begin{aligned}
 I(m, 0) &= \int_a^b (x-a)^m dx \\
 &= \left[ \frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} \right]_a^b \\
 &= \frac{(b-a)^{m+1}}{m+1} \\
 I(1, 1) &= \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2} (x-a)^2 (x-b) \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} (x-a)^2 dx \\
 &= - \left[ \frac{1}{6} (x-a)^3 \right]_a^b \\
 &= - \frac{1}{6} (b-a)^3
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I(m, 0) = \frac{(b-a)^{m+1}}{m+1}$$

$$I(1, 1) = -\frac{1}{6} (b-a)^3$$

(2)

$$\begin{aligned}
 I(m, n) &= \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \\
 &= \left[ \frac{1}{m+1} (x-a)^{m+1} (x-b)^n \right]_a^b - \frac{n}{m+1} \int_a^b (x-a)^{m+1} (x-b)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I(m, n) = -\frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

(3)

(2)を繰り返し用いた後に, (1)の結果を適用することにより,

$$\begin{aligned}
 I(5, 5) &= -\frac{5}{6} I(6, 4) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) I(7, 3) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) I(8, 2) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) I(9, 1) \\
 &= -\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) I(10, 0) \\
 &= -\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot \frac{(b-a)^{11}}{11} \\
 &= -\frac{(b-a)^{11}}{2772}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad I(5, 5) = -\frac{(b-a)^{11}}{2772}$$