

'08

前期日程

数 学 問 題

(工 学 部 I)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子には問題が5題で、5枚の答案用紙があります。問題に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
3. 受験番号はすべての答案用紙の所定の欄に必ず記入してください。
4. 5枚の答案用紙のみを回収しますので、この表紙は持ち帰ってください。
5. 裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが、解答は各問題の下の解答欄に書き、裏面は使用しないでください。
裏面に解答してもその部分は採点しません。

1 $a > 0$ とし、放物線 $C: y = ax^2 + b$ が直線 $l_1: y = x$ と直線 $l_2: y = -x$ にそれぞれ点 T_1, T_2 で接している。

(1) b を a で表せ。

(2) 放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。

(3) 放物線 C 上の点 P における接線が直線 l_1, l_2 と交わる点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。ただし、 $P \neq T_1, P \neq T_2$ とする。

Q_1, Q_2 の y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とするとき、 $y_1 + y_2$ の値は点 P のとり方によらず一定であることを示せ。

2 $\triangle OAB$ の 3 辺の長さを $OA = OB = \sqrt{5}$, $AB = 2$ とする. また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) 点 B から直線 OA におろした垂線と直線 OA との交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ.

(3) 点 O から直線 AB におろした垂線と直線 BP との交点を Q とするとき, $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

3 x と y がともに整数であるとき, 平面上の点 (x, y) を整数点と呼ぶ. 次の問いに答えよ.

(1) 連立不等式 $4x + 3y \leq 234$, $0 \leq x \leq 36$, $0 \leq y$ の表す領域内の整数点の個数を求めよ.

(2) 連立不等式 $4x + 3y < 144$, $-x + 3y < 48$, $0 < x$, $0 < y$ の表す領域を D とする. 点 (x, y) が D 内の整数点を動くとき, $x + 3y$ の最大値を求めよ.

4 次の _____ に, 必要条件である, 十分条件である, 必要十分条件である, 必要条件でも十分条件でもない, のうち, 最も適当であるものをあてはめよ. また, その理由を書け.

(1) $|x+1| > |x-1| > |x-2|$ は $-1 < x < 2$ であるための _____ .

(2) $|x+1| < |x-1| < |x-2|$ は $x < -1$ であるための _____ .

5 a, b は定数, m, n は 0 以上の整数とし, $I(m, n) = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$ とする.

(1) $I(m, 0)$, $I(1, 1)$ の値を求めよ.

(2) 部分積分法を用いて, $I(m, n)$ を $I(m+1, n-1)$, m, n で表せ. ただし, n は 1 以上の整数とする.

(3) $I(5, 5)$ の値を求めよ.