

(1)

点 $(5, 0)$ を通る傾き a の直線は

$$y = a(x - 5) = ax - 5a$$

と表されるので、円と異なる2点で交わるとき

$$x^2 + (ax - 5a)^2 = 9 \Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 - 10a^2x + 25a^2 - 9 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 25a^4 - (1 + a^2)(25a^2 - 9) \\ &= -16a^2 + 9 > 0 \end{aligned}$$

が成立する。よってこれを解いて、

$$-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$$

(2)

2 交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、これらは①の解である。そのため解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{10a^2}{1 + a^2}$$

が成立する。よって M の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5a^2}{1 + a^2} \\ Y = \frac{a\alpha - 5a + a\beta - 5a}{2} = \frac{a(\alpha + \beta) - 10a}{2} = -\frac{5a}{1 + a^2} \end{cases}$$

と表すことができるので、

(i) $a = 0$ のとき

$$X = Y = 0$$

となる。

(ii) $a \neq 0$ のとき

$$\frac{X}{Y} = -a$$

となるので、これを上の式に代入して

$$X = \frac{5\left(\frac{X}{Y}\right)^2}{1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2} = \frac{5X^2}{X^2 + Y^2}$$

となる。 $a \neq 0$ より $X \neq 0$ であるから、両辺を X で割って整理し

$$X^2 + Y^2 - 5X = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{25}{4}$$

を得る。これは $(X, Y) = (0, 0)$ を通る。ここで、 $-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$, $a \neq 0$ であり

$$X = \frac{5a^2}{1 + a^2} = \frac{5}{\frac{1}{a^2} + 1}$$

であるから

$$X = \frac{5a^2}{1 + a^2} = \frac{5}{\frac{1}{a^2} + 1} < \frac{5}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \frac{5}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{5}$$

また、 $X = \frac{5a^2}{1 + a^2} > 0$ ($\because a > 0$) である。

以上(i), (ii)をあわせると、求める軌跡は

円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ の $0 \leq x < \frac{9}{5}$ の部分であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \quad \left(0 \leq x < \frac{9}{5}\right)$$

(1)

接点の座標を $\left(t, \frac{3}{4}t^2 - 3t + 4\right)$ とおくと

$$y' = \frac{3}{2}x - 3$$

より、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{3}{2}t - 3\right)(x - t) + \frac{3}{4}t^2 - 3t + 4 \\ &= \left(\frac{3}{2}t - 3\right)x - \frac{3}{4}t^2 + 4 \end{aligned}$$

と表される。これが点 $(0, -8)$ を通るとき

$$-8 = -\frac{3}{4}t^2 + 4 \Leftrightarrow t^2 = 16 \quad \therefore t = \pm 4$$

ここで接線の傾きが正であることから

$$t = 4$$

である。よって接線は $t = 4$ を代入して

$$y = 3x - 8$$

となる。

(答) $y = 3x - 8$

(2)

求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 - 3x + 8 \right) dx &= \left[\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 12x \right]_0^4 \\ &= 16 - 48 + 48 \\ &= 16 \end{aligned}$$

(答) 16

(1)

OA, OB, OC の長さをそれぞれ a, b, c とすると、三平方の定理から

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}$$

が成り立つので、面積の公式より

$$\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} = 12 \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle ABC$ について余弦定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \cdot \frac{1}{2}$$

整理すると、

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} = 2b^2$$

①を代入して

$$12 = 2b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{6} \quad (\because b > 0)$$

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{6}$$

(2)

体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ab \times c = \frac{ac}{\sqrt{6}} \quad (\because b = \sqrt{6})$$

と表されるので、 $ac = t$ とおくと、 t の最大値を求めればよいことになる。ここで①から、

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = 144 \Leftrightarrow (ac)^2 + 6\{(a+c)^2 - 2ac\} + 6^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6(a+c)^2 - 12t = 108$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 = \frac{-t^2 + 12t + 108}{6}$$

$$\therefore a+c = \sqrt{\frac{-t^2 + 12t + 108}{6}} \quad (\because a, c > 0)$$

を得る。これらより、 a, c は二次方程式

$$x^2 - \sqrt{\frac{-t^2 + 12t + 108}{6}} x + t = 0$$

の解である。いま a, c は正の数であるから、この二次方程式が正の解をもつ条件を考えると、判別式を D としたとき

$$D = \frac{-t^2 + 12t + 108}{6} - 4t = \frac{-t^2 - 12t + 108}{6} \geq 0$$

が t の条件となることが分かる。よって

$$D \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 108 \leq 0 \Leftrightarrow (t+18)(t-6) \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq t \leq 6$$

このことと、 $t > 0$ であることとあわせて

$$0 < t \leq 6$$

よって体積が最大となるとき、その値は $t = 6$ を代入して、 $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$$(\text{答}) \quad \sqrt{6}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \left\{ \log \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) \right\}' &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + a} \right)'}{x + \sqrt{x^2 + a}} \\
 &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}
 \end{aligned}$$

$$(答) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

(2)

(1)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= \int_0^b \left(\log \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) \right)' dx \\
 &= \left[\log \left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) \right]_0^b \\
 &= \log \left(b + \sqrt{b^2 + a} \right) - \frac{1}{2} \log a
 \end{aligned}$$

となる。ここに $a = \frac{4b^2}{(e - e^{-1})^2}$ を代入して,

$$\begin{aligned}
 \log \left(b + \sqrt{b^2 + a} \right) &= \log \left(b + \sqrt{b^2 + \frac{4b^2}{(e - e^{-1})^2}} \right) \\
 &= \log b \left(1 + \frac{1}{e - e^{-1}} \sqrt{(e - e^{-1})^2 + 4} \right) \\
 &= \log b + \log \left(1 + \frac{1}{e - e^{-1}} \sqrt{e^2 - 2 + e^{-2} + 4} \right) \\
 &= \log b + \log \left(1 + \frac{1}{e - e^{-1}} \sqrt{(e + e^{-1})^2} \right) \\
 &= \log b + \log \frac{2e}{e - e^{-1}} \\
 &= \log b + \log 2 + 1 - \log(e - e^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log a &= \log 4b^2 - \log (e - e^{-1})^2 \\
 &= 2 \log b + 2 \log 2 - 2 \log (e - e^{-1})
 \end{aligned}$$

であるから

$$\log \left(b + \sqrt{b^2 + a} \right) - \frac{1}{2} \log a = 1$$

$$(答) \quad 1$$

(1)

$n!$ の末尾に0がいくつ続くかは、 $n!$ が10で何回割られるかで判断でき、10で何回割れるかは、5で何回割れるか、つまり $n!$ を素因数分解したときの5の次数に等しい。よって1から5までの間に5は1回でてくるので

$$a_5 = 1$$

25!について、1から25までの間に、5の倍数は5個、 5^2 の倍数は1個あるので、

$$a_{25} = 5 + 1 = 6$$

$$(\text{答}) \quad a_5 = 1, \quad a_{25} = 6$$

(2)

(1)と同様にかんがえると、125!について、5の倍数は25個、 5^2 の倍数は5個が 5^3 の倍数は1個でてくるので

$$a_{125} = 25 + 5 + 1 = 31$$

$$(\text{答}) \quad a_{125} = 31$$

(3)

(1), (2)と同様に考える。 $n = 5^k$ のとき、 $n!$ を素因数分解したときの5の次数は、その計算の中に含まれている 5^i ($i = 1, 2, \dots, k$)の倍数の個数の総和である。 5^i の倍数は

$$5^{k-i} \text{ つ}$$

含まれているので、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^k 5^{k-i} = 5^k \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{5}\right)^i \\ &= 5^k \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^k}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{5^k - 1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{5^k - 1}{4}$$