

(1)

$$|x+y|+|x-y|=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $|x-y| \geq 0$ なので、 $|x+y| \leq 2$ 、つまり $-2 \leq x+y \leq 2$ である。

①の解のうち、 $x=1, y=1$ のとき $x+y=2$

$$x=-1, y=-1 \text{ のとき } x+y=-2$$

が成り立つことと合わせると、 $x+y$ の最大値は 2、最小値は -2 であることが分かる。

(答) 最大値： 2
最小値： -2

(2)

ある (x, y) の組が①の解であるとする、 $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ も①の解である。

よって、 $|x|+|y|$ の最大値・最小値を考える場合には、 $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲で考えても一般性を失わない。

(i) $x \geq y \geq 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x+y+x-y=2$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

y は $0 \leq y \leq 1$ の任意の値をとりうるので、 $|x|+|y|=x+y$ の最大値は 2、最小値は 1

(ii) $y \geq x \geq 0$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x+y-x+y=2$$

$$\Leftrightarrow y=1$$

x は $0 \leq x \leq 1$ の任意の値をとりうるので、 $|x|+|y|=x+y$ の最大値は 2、最小値は 1

以上より、 $|x|+|y|$ の最大値は 2、最小値は 1 である。

(答) 最大値： 2
最小値： 1

$A(a, 0)$, $B(0, b)$, $a > 0, b > 0$ とおくと, $AB = 4$ より三平方の定理を用いて,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 4$$

$$a^2 + b^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

AB の中点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ を通り, AB に垂直な直線について, 傾き m とすると,

$$m \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

$$m = \frac{a}{b}$$

よって, 垂直二等分線の式は,

$$y = \frac{a}{b} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}$$

$$2ax - 2by - a^2 + b^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②と原点との距離が 1 であることから, 点と直線の距離の公式を用いて

$$\frac{|-a^2 + b^2|}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = 1$$

$$|-a^2 + b^2| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

ここで①より, $b^2 = 16 - a^2$ だから,

$$|2a^2 - 16| = 8$$

$$a^2 - 8 = \pm 4$$

$$a^2 = 4, 12$$

ここで, $a > 0$ より

$$a = 2, 2\sqrt{3}$$

①より,

$$(a, b) = (2, 2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, 2)$$

②より, 求める接線の式は

$$(a, b) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ のとき}$$

$$x - \sqrt{3}y + 2 = 0$$

$$(a, b) = (2\sqrt{3}, 2) \text{ のとき}$$

$$\sqrt{3}x - y - 2 = 0$$

(答) $A(2, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3})$ のとき, 接線の方程式は $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

$A(2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 2)$ のとき, 接線の方程式は $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$