

(1)

点 $(5, 0)$ を通る傾き a の直線は

$$y = a(x - 5) = ax - 5a$$

と表されるので、円と異なる2点で交わる時

$$x^2 + (ax - 5a)^2 = 9 \Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 - 10a^2x + 25a^2 - 9 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 25a^4 - (1 + a^2)(25a^2 - 9) \\ &= -16a^2 + 9 > 0 \end{aligned}$$

が成立する。よってこれを解いて、

$$-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$$

(2)

2 交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、これらは $\textcircled{1}$ の解である。そのため解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{10a^2}{1 + a^2}$$

が成立する。よって M の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5a^2}{1 + a^2} \\ Y = \frac{a\alpha - 5a + a\beta - 5a}{2} = \frac{a(\alpha + \beta) - 10a}{2} = -\frac{5a}{1 + a^2} \end{cases}$$

と表すことができるので、

(i) $a = 0$ のとき

$$X = Y = 0$$

となる。

(ii) $a \neq 0$ のとき

$$\frac{X}{Y} = -a$$

となるので、これを上の式に代入して

$$X = \frac{5\left(\frac{X}{Y}\right)^2}{1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2} = \frac{5X^2}{X^2 + Y^2}$$

となる。 $a \neq 0$ より $X \neq 0$ であるから、両辺を X で割って整理し

$$X^2 + Y^2 - 5X = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{25}{4}$$

を得る。これは $(X, Y) = (0, 0)$ を通る。ここで、 $-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{4}$, $a \neq 0$ であり

$$X = \frac{5a^2}{1 + a^2} = \frac{5}{\frac{1}{a^2} + 1}$$

であるから

$$X = \frac{5a^2}{1 + a^2} = \frac{5}{\frac{1}{a^2} + 1} < \frac{5}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} = \frac{5}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{5}$$

また、 $X = \frac{5a^2}{1 + a^2} > 0$ ($\because a > 0$) である。

以上(i), (ii)をあわせると、求める軌跡は

円 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ の $0 \leq x < \frac{9}{5}$ の部分であることが分かる。

$$(\text{答}) \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \quad \left(0 \leq x < \frac{9}{5}\right)$$

(1)

接点の座標を $\left(t, \frac{3}{4}t^2 - 3t + 4\right)$ とおくと

$$y' = \frac{3}{2}x - 3$$

より、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{3}{2}t - 3\right)(x - t) + \frac{3}{4}t^2 - 3t + 4 \\ &= \left(\frac{3}{2}t - 3\right)x - \frac{3}{4}t^2 + 4 \end{aligned}$$

と表される。これが点 $(0, -8)$ を通るとき

$$-8 = -\frac{3}{4}t^2 + 4 \Leftrightarrow t^2 = 16 \therefore t = \pm 4$$

ここで接線の傾きが正であることから

$$t = 4$$

である。よって接線は $t = 4$ を代入して

$$y = 3x - 8$$

となる。

(答) $y = 3x - 8$

(2)

求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 - 3x + 8 \right) dx &= \left[\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 12x \right]_0^4 \\ &= 16 - 48 + 48 \\ &= 16 \end{aligned}$$

(答) 16

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。また、 $x^2 + bx + a = 0$ は $\frac{1}{\alpha}$ と $\frac{1}{\beta}$ を解にもつので、

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -b \\ \frac{1}{\alpha\beta} = a \end{cases}$$

となる。これに①を代入して整理すれば、

$$-\frac{a}{b} = -b, \frac{1}{b} = a$$

$$\therefore b^2 = a, \quad \dots \textcircled{2}$$

$$ab = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

よって②, ③から

$$b^3 = 1 \quad \therefore b = 1$$

これを③に代入して、 $a = 1$ となる。

(答) $a = b = 1$

(1)

条件 q :

$$x(x-1)(x-2) > 0$$

を解くと,

$$0 < x < 1, 2 < x$$

となる。よって、この範囲に $x > a$ なる x が全て含まれればよいので、求める a の条件は、 $a \geq 2$

(答) $a \geq 2$

(2)

$0 < x < 1, 2 < x$ を満たす全ての x が $x > a$ に含まれればよいので

$$a \leq 0$$

(答) $a \leq 0$

(1)

$n!$ の末尾に0がいくつ続くかは、 $n!$ が10で何回割られるかで判断でき、10で何回割れるかは、5で何回割れるか、つまり $n!$ を素因数分解したときの5の次数に等しい。よって1から5までの間に5は1回でてくるので

$$a_5 = 1$$

25!について、1から25までの間に、5の倍数は5個、 5^2 の倍数は1個あるので、

$$a_{25} = 5 + 1 = 6$$

$$(\text{答}) \quad a_5 = 1, \quad a_{25} = 6$$

(2)

(1)と同様に考えると、125!について、5の倍数は25個、 5^2 の倍数は5個が 5^3 の倍数は1個でてくるので

$$a_{125} = 25 + 5 + 1 = 31$$

$$(\text{答}) \quad a_{125} = 31$$