

二項定理を繰り返し用いれば,

$$\begin{aligned}
 \left(x - \frac{x^2}{2} + y^2 - 2y^3\right)^{10} &= \sum_{r=0}^{10} {}_{10}C_r \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^r (y^2 - 2y^3)^{10-r} \\
 &= \sum_{r=0}^{10} {}_{10}C_r \left\{ \sum_{s=0}^r {}_rC_s x^s \left(-\frac{x^2}{2}\right)^{r-s} \times \sum_{t=0}^{10-r} {}_{10-r}C_t y^{2t} (-2y^3)^{10-r-t} \right\} \\
 &= \sum_{r=0}^{10} \sum_{s=0}^r \sum_{t=0}^{10-r} {}_{10}C_r {}_rC_s {}_{10-r}C_t \left(-\frac{1}{2}\right)^{r-s} (-2)^{10-r-t} x^{2r-s} y^{30-3r-t}
 \end{aligned}$$

となる。いま、次数が 12 のとき,

$$(2r-s) + (30-3r-t) = 12$$

$$\Leftrightarrow -r-s-t+30=12$$

$$\Leftrightarrow r+s+t=18$$

を満たす。このことと

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 10 \\ 0 \leq s \leq r \\ 0 \leq t \leq 10-r \end{cases}$$

であることから、次数が 12 となるような (r, s, t) の組は,

$$(r, s, t) = (10, 8, 0), (9, 9, 0), (9, 8, 1), (8, 8, 2)$$

となる。求める和はこれらの組み合わせにおいて

$${}_{10}C_r {}_rC_s {}_{10-r}C_t \left(-\frac{1}{2}\right)^{r-s} (-2)^{10-r-t}$$

を計算し、その和を求めればよい。よって求める和は,

$$\begin{aligned}
 & {}_{10}C_{10} {}_{10}C_{80} C_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + {}_{10}C_{99} C_{91} C_0 (-2) + {}_{10}C_{99} C_{81} C_1 \left(-\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_{88} C_{82} C_2 \\
 &= -\frac{35}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{35}{4}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$(b=c=0 \text{ または } a+d=0) \text{ かつ } a^2+bc=1$$

であることが分かる。

(i) $b=c=0$ のとき

$$a^2=d^2=1$$

より

$$(a, d) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

であるが, $A \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$(a, d) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

のいずれかとなる。

また, 直線 $y=2x+1$ 上の点 $(x, 2x+1)$ の, A であらわされる一次変換は

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 2dx+d \end{pmatrix}$$

となり, この点が $y=2x+k$ 上にあることから,

$$2dx+d=2ax+k \Leftrightarrow 2(a-d)x+k-d=0$$

これが任意の x で成り立つので

$$a-d=0, k-d=0 \Leftrightarrow a=d=k$$

よって①とあわせると

$$a=d=k=1$$

となるが, $k \neq 1$ よりこの解は不適である。

(ii) $a+d=0$ のとき

このとき, 直線 $y=2x+1$ 上の点 $(x, 2x+1)$ の一次変換は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2b)x+b \\ (c-2a)x-a \end{pmatrix}$$

であるから, この点が $y=2x+k$ 上にあるとき

$$(c-2a)x-a=2\{(a+2b)x+b\}+k \Leftrightarrow (4a+4b-c)x+a+2b+k=0$$

これが任意の x で成り立つので

$$4a+4b-c=0, \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a+2b+k=0 \quad \dots \textcircled{3}$$

また, $a^2+bc=1$ であるからこれと②より,

$$a^2+b(4a+4b)=1 \Leftrightarrow (a+2b)^2=1 \Leftrightarrow a+2b=\pm 1$$

$$\therefore a=-2b\pm 1$$

となる。これを③に代入して

$$-2b\pm 1+2b+k=0 \Leftrightarrow k=\mp 1 \quad (\text{複号同順})$$

となり, $k \neq 1$ より $k=-1$ である。このことから $a=-2b+1$ 。よってこれと $a+d=0$,

②から,

$$d=2b-1, c=-4b+4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a=-2b+1, c=-4b+4, d=2b-1, k=-1$$

(1)

OA, OB, OC の長さをそれぞれ a, b, c とすると、三平方の定理から

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}$$

が成り立つので、面積の公式より

$$\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} = 12 \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle ABC$ について余弦定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \cdot \frac{1}{2}$$

整理すると、

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} = 2b^2$$

①を代入して

$$12 = 2b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{6} \quad (\because b > 0)$$

$$(\text{答}) \quad b = \sqrt{6}$$

(2)

体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ab \times c = \frac{ac}{\sqrt{6}} \quad (\because b = \sqrt{6})$$

と表されるので、 $ac = t$ とおくと、 t の最大値を求めればよいことになる。ここで①から、

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = 144 \Leftrightarrow (ac)^2 + 6\{(a+c)^2 - 2ac\} + 6^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6(a+c)^2 - 12t = 108$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 = \frac{-t^2 + 12t + 108}{6}$$

$$\therefore a+c = \sqrt{\frac{-t^2 + 12t + 108}{6}} \quad (\because a, c > 0)$$

を得る。これらより、 a, c は二次方程式

$$x^2 - \sqrt{\frac{-t^2 + 12t + 108}{6}} x + t = 0$$

の解である。いま a, c は正の数であるから、この二次方程式が正の解をもつ条件を考えると、判別式を D としたとき

$$D = \frac{-t^2 + 12t + 108}{6} - 4t = \frac{-t^2 - 12t + 108}{6} \geq 0$$

が t の条件となることが分かる。よって

$$D \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 108 \leq 0 \Leftrightarrow (t+18)(t-6) \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq t \leq 6$$

このことと、 $t > 0$ であることとあわせて

$$0 < t \leq 6$$

よって体積が最大となるとき、その値は $t = 6$ を代入して、 $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$$(\text{答}) \quad \sqrt{6}$$

(1)

$$\begin{aligned}\log_{10} A + \log_{10} C &= \log_{10} AC \\ &= -\log_{10} B \leq -\log_{10} \frac{1}{10} = 1\end{aligned}$$

(証明終)

(2)

$A > 1$ であるとする、 $1 < A \leq B \leq C$ より $ABC > 1$ となってしまうため

$$A \leq 1$$

である。よって

$$\log_{10} A \leq \log_{10} 1 = 0$$

となる。

また、 $C < 1$ であるとする、 $A \leq B \leq C < 1$ より $ABC < 1$ となってしまうため

$$C \geq 1$$

である。よって

$$\log_{10} C \geq \log_{10} 1 = 0$$

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}& (1 + \log_{10} A)(1 + \log_{10} B)(1 + \log_{10} C) \\&= (1 + \log_{10} A + \log_{10} B + \log_{10} A \log_{10} B)(1 + \log_{10} C) \\&= 1 + \log_{10} A + \log_{10} B + \log_{10} C \\&\quad + \log_{10} B (\log_{10} A + \log_{10} C) + \log_{10} A \log_{10} C (1 + \log_{10} B) \\&= 1 + \log_{10} B (\log_{10} A + \log_{10} C) + \log_{10} A \log_{10} C (1 + \log_{10} B) \\&\quad (\because ABC = 1 \text{ より, } \log_{10} A + \log_{10} B + \log_{10} C = \log_{10} ABC = 0) \\&\leq 1 + \log_{10} B (\log_{10} A + \log_{10} C) \\&\quad (\because (2) \text{ より, } \log_{10} A \log_{10} C (1 + \log_{10} B) \leq 0) \\&= 1 - (\log_{10} B)^2 \quad (\because \log_{10} A + \log_{10} B + \log_{10} C = 0 \Leftrightarrow \log_{10} A + \log_{10} C = -\log_{10} B) \\&\leq 1\end{aligned}$$

より、題意は成り立つ。

(証明終)

(1)

$n!$ の末尾に0がいくつ続くかは、 $n!$ が10で何回割られるかで判断でき、10で何回割れるかは、5で何回割れるか、つまり $n!$ を素因数分解したときの5の次数に等しい。

$n=5^k$ のとき、 $n!$ を素因数分解したときの5の次数は、その計算の中に含まれている 5^i ($i=1, 2, \dots, k$)の倍数の個数の総和である。 5^i の倍数は

5^{k-i} 個

含まれているので、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^k 5^{k-i} = 5^k \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{5}\right)^i \\ &= 5^k \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^k}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{5^k - 1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{5^k - 1}{4}$$

(2)

(1)と同様に考える。

1から2009の間に

5の倍数は 401個

$5^2 = 25$ の倍数は 80個

$5^3 = 125$ の倍数は 16個

$5^4 = 625$ の倍数は 3個

含まれているので、

$$a_{2009} = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$$

$$(\text{答}) \quad a_{2009} = 500$$