

(1)

点 O から辺 AB におろした垂線の足を点 D とすると、三角錐 OABC は面 OCD に関して対称な図形となっている。

△OAD に関して三平方の定理より

$$OD = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

となる。同様に△CAD に関して三平方の定理より $CD = 2$ となる。

△DOC は $OD = CD = 2$ の二等辺三角形となっているので、点 D から辺 OC におろした垂線の足を点 E とすると、△DOE に関して三平方の定理より、

$$DE = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

となる。よって

$$\triangle DOE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

である。

ここで、三角錐 OABC を三角錐 OADC と三角錐 ODBC の2つの三角錐に分けて考えると、それぞれの三角錐は、底面を△DOE とすると高さが

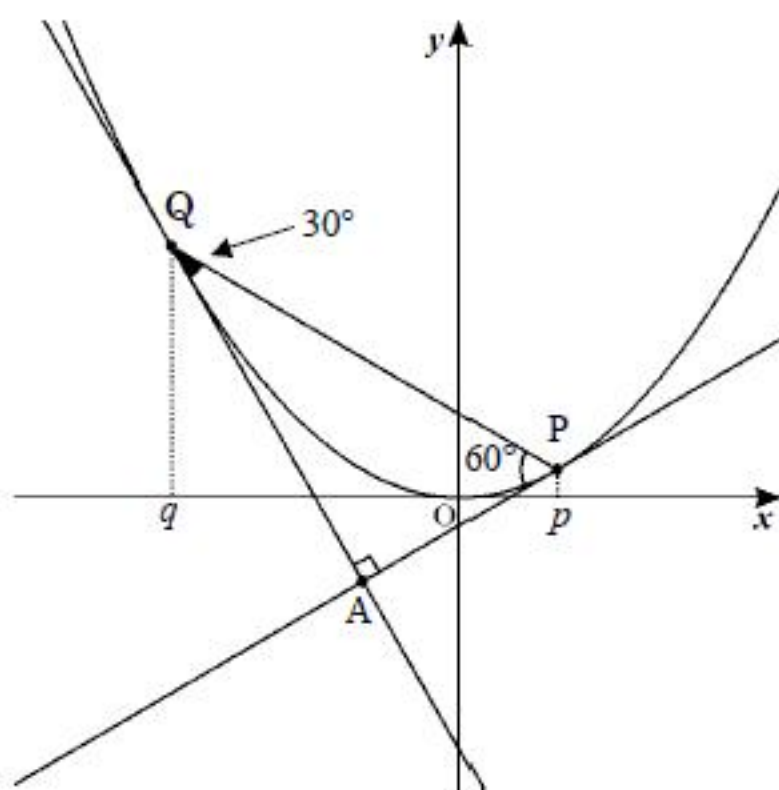
$$\frac{1}{2} \cdot AB = \sqrt{3}$$

の三角錐となっている。(∵ $OD \perp AB, CD \perp AB$ より、面 $ODC \perp AB$) よって三角錐 OABC の体積は

$$2 \times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{21}}{2}$



点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおく。ただし $p = q$ とすると点 P, Q におけるそれぞれの接線は一致してしまうので、不適である。よって $p \neq q$ とする。

放物線の方程式 $y = x^2$ の両辺を x で微分すると

$$y' = 2x$$

となるので、点 P, Q における接線の傾きはそれぞれ $2p, 2q$ である。 $\angle A = 90^\circ$ ，すなわち点 P, Q におけるそれぞれの接線が直交するので

$$2p \cdot 2q = -1$$

$$\Leftrightarrow pq = -\frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。一方、直線 PQ の傾きは

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q$$

である。 $\angle P = 60^\circ$ ，すなわち線分 PQ と点 P における接線がなす角が 60° なので

$$\tan 60^\circ = \pm \frac{(p+q) - 2p}{1 + 2p(p+q)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q-p}{1+2p(p+q)} = \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{4p} - p}{1+2p\left\{p+\left(-\frac{1}{4p}\right)\right\}} = \pm \sqrt{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{3}p^3 \pm 4p^2 + 2\sqrt{3}p \pm 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4p^2 + 1)(2\sqrt{3}p \pm 1) = 0$$

となる。 p は実数なので、

$$p = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, q = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{複合同順})$$

となる。したがって 2 点 P, Q の座標は

$$P\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{12}\right), Q\left(\mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad (\text{複合同順})$$

である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{12}\right), Q\left(\mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad (\text{複合同順})$$