

(1)

$$10^n < \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

について、底を10とする対数をとると

$$n < m \log_{10} \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n < (1 - 2 \log_{10} 2)m$$

$$\Leftrightarrow 5n < 5(1 - 2 \log_{10} 2)m$$

となる。ここで

$$5(1 - 2 \log_{10} 2) = 5(1 - 2 \times 0.3010) = 1.99 < 2$$

であるから、

$$5n < 2m$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \frac{1}{5000} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

について、底を10とする対数をとると

$$n \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \log_{10} \left(\frac{2}{10^4}\right) < (n-1) \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right) < \log_{10} 2 - 4 < (n-1) \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right)$$

$$\Leftrightarrow n-1 < \frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} < n$$

となる。ここで、

$$\frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{0.3010 - 4}{\frac{1}{2} \times 0.4771 - 0.3010} = 59.23 \dots$$

であり、 n は自然数なので

$$n = 60$$

である。

(答) $n = 60$

2

(1)

$$y = -x^2 \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると}$$
$$y' = -2x$$

となる。よって点 $(1, -1)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y = -2 \cdot 1 \cdot (x - 1) - 1 = -2x + 1$$

となる。

(答) $y = -2x + 1$

(2)

$$y = ax^2 + bx + c \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると}$$
$$y' = 2ax + b$$

となる。 C_2 が点 $(0, 2)$, $(1, -1)$ を通り、点 $(1, -1)$ における接線が直線 ℓ であることから

$$\begin{aligned} c &= 2 && \dots \textcircled{1} \\ a + b + c &= -1 && \dots \textcircled{2} \\ 2a + b &= -2 && \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を a, b, c について解くと

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 2$$

となる。

(答) $a = 1, \quad b = -4, \quad c = 2$

(3)

直線 $y = -kx$ と C_1, C_2 で囲まれた部分の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。

$y = -kx$ と C_1 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -kx &= -x^2 \\ \Leftrightarrow x(x - k) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, k \end{aligned}$$

であり、 C_1 は上に凸な放物線なので、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^k \\ &= \frac{k^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

$y = -kx$ と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -kx &= x^2 - 4x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (k - 4)x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

の解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると、2 つの実数解が存在する条件は

$$\begin{aligned} D &= (k - 4)^2 - 4 \cdot 2 = k^2 - 8k + 8 > 0 \\ \Leftrightarrow k &< 4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2} < k && \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。 k がこの範囲にあると仮定して、この 2 次方程式の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解

と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 4 - k, \quad \alpha\beta = 2$$

が成り立っている。 C_2 は下に凸な放物線なので、 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -kx - (x^2 - 4x + 2) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ x^2 + (k - 4)x + 2 \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} (k^2 - 8k + 8)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$S_1 = S_2$ となるとき、

$$k^3 = (k^2 - 8k + 8)^{\frac{3}{2}}$$

より、

$$k = 1$$

となる。これは $\textcircled{4}$ の範囲に含まれているので、適する。

(答) $k = 1$

(1)

数列 $\{c_n\}$ を群数列とみなして、第 n 群を $\{na, (n-1)a+b, \dots, a+(n-1)b, nb\}$ とする。第 n 群の

項数は $n+1$ であるので、第 n 群までの項数の総計を $f(n)$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n (k+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2}n(n+3) \end{aligned}$$

である。ここで

$$f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5+3) = 20$$

であるので、 c_{20} は第 5 群の第 6 項である。よって

$$c_{20} = 5b$$

である。

(答) $c_{20} = 5b$

(2)

第 n 群の項の和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= na + \{(n-1)a+b\} + \dots + \{a+(n-1)b\} + nb \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(a+b) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} c_n &= \sum_{n=1}^5 S(n) \\ &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \right) \\ &= 35(a+b) \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{n=1}^{20} c_n = 35(a+b)$

(1)

点 P は線分 OA を 1:2 に、点 Q は線分 PB を $s:1-s$ に内分する点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OB} = \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b}$$

(2)

直線 OQ と辺 AB の交点を R とすると、 k を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{4k}{7}\vec{a} + \frac{3k}{7}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので、①と②の係数を比較して

$$\begin{aligned}\frac{1-s}{3} &= \frac{4k}{7} \quad \dots \textcircled{3} \\ s &= \frac{3k}{7} \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。③、④を k, s について解くと

$$k = \frac{7}{15}, \quad s = \frac{1}{5}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad s = \frac{1}{5}$$

(3)

点 G は $\triangle OAB$ の重心なので

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OG} \\ &= \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{3s-1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle OAB$ が $OA = OB$ の直角二等辺三角形なので、

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GQ}|^2 &= \left(\frac{s}{3}\right)^2 |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{3s-1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{3s-1}{3}\right)^2 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{|\vec{a}|^2}{9} (10s^2 - 6s + 1) \\ &= \frac{10|\vec{a}|^2}{9} \left\{ \left(s - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{100} \right\}\end{aligned}$$

となるので、線分 GQ の長さが最小になるのは $s = \frac{3}{10}$ のときである。

$$\text{(答)} \quad s = \frac{3}{10}$$

$p < q < r$ より

$$\frac{3}{p} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$$

$$\therefore 3 > p$$

が成り立つ。これと $p \geq 2$ を同時に満たす整数 p は

$$p = 2$$

だけである。 $p = 2$ を与えられた不等式に代入すると

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

となる。 $q < r$ より

$$\frac{2}{q} > \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4 > q$$

が成り立つ。これと $q > p = 2$ を同時に満たす整数 q は

$$q = 3$$

だけである。 $p = 2$, $q = 3$ を与えられた不等式に代入すると

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{6}$$

$$\therefore r \leq 6$$

が成り立つ。これと $r > q = 3$ を同時に満たす整数 r は

$$r = 4, 5, 6$$

がある。

以上より、考えられる p, q, r の組は

$$(p, q, r) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p, q, r) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)$$