

1

(I)
(ア)

$$10^n < \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

について、底を10とする対数をとると

$$\begin{aligned} n &< m \log_{10} \left(\frac{5}{2}\right) \\ \Leftrightarrow n &< (1 - 2 \log_{10} 2) m \\ \Leftrightarrow 5n &< 5(1 - 2 \log_{10} 2) m \end{aligned}$$

となる。ここで

$$5(1 - 2 \log_{10} 2) = 5(1 - 2 \times 0.3010) = 1.99 < 2$$

であるから、

$$5n < 2m$$

が成り立つ。

(証明終)

(イ)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \frac{1}{5000} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

について、底を10とする対数をとると

$$\begin{aligned} n \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &< \log_{10} \left(\frac{2}{10^4}\right) < (n-1) \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow n \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right) &< \log_{10} 2 - 4 < (n-1) \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right) \\ \Leftrightarrow n-1 &< \frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} < n \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{0.3010 - 4}{\frac{1}{2} \times 0.4771 - 0.3010} = 59.23 \dots$$

であり、 n は自然数なので

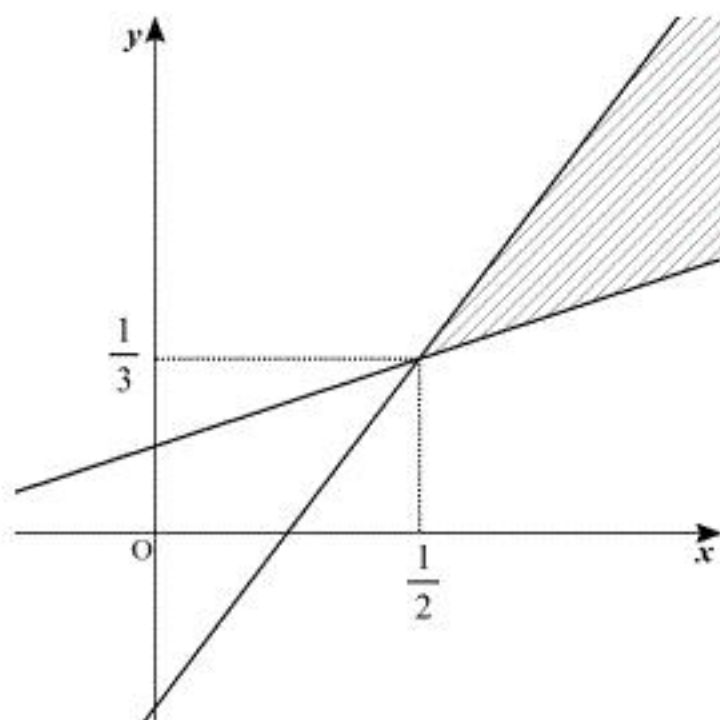
$$n = 60$$

である。

(答) $n = 60$

(2)

連立不等式 $4x - 3y \geq 1$, $-2x + 6y \geq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示すると、次図の斜線部のようになる。ただし、境界を含む。



ここで $\log_8(4^x + 8^y)$ を x の関数とみると、この関数は単調増加関数である。同様に

$\log_8(4^x + 8^y)$ を y の関数とみても単調増加関数となっている。したがって、 x と y がそれぞれ

小さければ小さいほど $\log_8(4^x + 8^y)$ は小さい値をとる。 x の最小値は前図より $\frac{1}{2}$ であるが、

このとき y も $\frac{1}{3}$ で最小値となっているので、 $\log_8(4^x + 8^y)$ が最小値をとるのは、

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$$

のときである。よって $\log_8(4^x + 8^y)$ の最小値は

$$\log_8 \left(4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} \right) = \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

である。

(答) $\frac{2}{3}$

2

(1)

回転移動 f を表わす行列は

$$F = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

である。

一方、直線 $y = (\tan \beta)x$ に関する対称移動 g によって点 (x, y) が点 (x', y') に移動することを考えると、点 (x, y) を原点 O を中心に角 $-\beta$ だけ回転させて移る先の点を x 軸に関して対称移動させ、さらに原点 O を中心に角 β だけ回転させて移る先の点が点 (x', y') である。したがって直線 $y = (\tan \beta)x$ に関する対称移動 g を表す行列は

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

したがって行列 H は

$$\begin{aligned} H &= GF \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\beta \cos \alpha + \sin 2\beta \sin \alpha & -\cos 2\beta \sin \alpha + \sin 2\beta \cos \alpha \\ \sin 2\beta \cos \alpha - \cos 2\beta \sin \alpha & -\sin 2\beta \sin \alpha - \cos 2\beta \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha) & \sin(2\beta - \alpha) \\ \sin(2\beta - \alpha) & -\cos(2\beta - \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad H = \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha) & \sin(2\beta - \alpha) \\ \sin(2\beta - \alpha) & -\cos(2\beta - \alpha) \end{pmatrix}$$

(2)

(1)より

$$H_1 = \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha_1) & \sin(2\beta - \alpha_1) \\ \sin(2\beta - \alpha_1) & -\cos(2\beta - \alpha_1) \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha_2) & \sin(2\beta - \alpha_2) \\ \sin(2\beta - \alpha_2) & -\cos(2\beta - \alpha_2) \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} H_2 H_1 &= \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha_2) & \sin(2\beta - \alpha_2) \\ \sin(2\beta - \alpha_2) & -\cos(2\beta - \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha_1) & \sin(2\beta - \alpha_1) \\ \sin(2\beta - \alpha_1) & -\cos(2\beta - \alpha_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\{(2\beta - \alpha_2) - (2\beta - \alpha_1)\} & -\sin\{(2\beta - \alpha_2) - (2\beta - \alpha_1)\} \\ \sin\{(2\beta - \alpha_2) - (2\beta - \alpha_1)\} & \cos\{(2\beta - \alpha_2) - (2\beta - \alpha_1)\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H_2 H_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix}$$

(3)

(2)の結果より、

$$H^2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \alpha) & -\sin(\alpha - \alpha) \\ \sin(\alpha - \alpha) & \cos(\alpha - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。また、(1)の結果より

$$G = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ \cdot 2) & \sin(45^\circ \cdot 2) \\ \sin(45^\circ \cdot 2) & -\cos(45^\circ \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

[1] n が奇数のとき

$n = 2m + 1$ (m は 0 以上の整数) と表すと、

$$\begin{aligned} (FG)^n &= (FG)^{2m+1} \\ &= F(GF)^{2m} G \\ &= F(H^2)^m G \\ &= FG \\ &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

[2] n が偶数のとき

$n = 2m$ (m は自然数) と表すと、

$$\begin{aligned} (FG)^n &= (FG)^{2m} \\ &= F(GF)(GF)^{2m-2} G \\ &= FH(H^2)^{m-1} G \\ &= FHG \\ &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ \cdot 2 - 30^\circ) & \sin(45^\circ \cdot 2 - 30^\circ) \\ \sin(45^\circ \cdot 2 - 30^\circ) & -\cos(45^\circ \cdot 2 - 30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(30^\circ + 60^\circ) & \sin(30^\circ + 60^\circ) \\ \sin(30^\circ + 60^\circ) & -\cos(30^\circ + 60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (FG)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(1)

数列 $\{c_n\}$ を群数列とみなして、第 n 群を $\{na, (n-1)a+b, \dots, a+(n-1)b, nb\}$ とする。第 n 群の

項数は $n+1$ であるので、第 n 群までの項数の総計を $f(n)$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n (k+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2}n(n+3) \end{aligned}$$

である。

$$f(12) = 90, f(13) = 104$$

であるので、 c_{100} は第 13 群の第 10 項である。よって

$$c_{100} = 4a + 9b$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_{100} = 4a + 9b$$

(2)

第 n 群の項の和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= na + \{(n-1)a+b\} + \dots + \{a+(n-1)b\} + nb \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(a+b) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} c_n &= \sum_{n=1}^{12} S(n) + \{13a + (12a+b) + \dots + (5a+8b) + (4a+9b)\} \\ &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \right) + (13+12+\dots+4)a + (1+2+\dots+9)b \\ &= 449a + 409b \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^{10} c_n = 449a + 409b$$

(3)

$a=2, b=5$ のとき、任意の自然数 n について第 n 群の要素は単調増加列になるように並んでいる。よって第 n 群の最大の項は nb なので、第 $(n+1)$ 群の項の中で初めて nb よりも大きくなる項を考えると、

$$nb - \{2a + (n-1)b\} = -2a + b = 1 > 0$$

$$nb - (a + nb) = -a = -2 < 0$$

より、 $a+nb$ で初めて nb よりも大きくなることが分かる。したがって数列 $\{d_n\}$ は

$$a, b, a+b, 2b, \dots, a+(n-1)b, nb, a+nb, (n+1)b, \dots$$

となる。初項から第 $2n$ 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} d_k &= a + b + (a+b) + 2b + \dots + \{a+(n-1)b\} + nb \\ &= na + 2 \sum_{k=1}^{n-1} kb + nb \\ &= na + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)nb + nb \\ &= n(a+nb) \\ &= n(2+5n) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n(2+5n)$$

4

(1)

点 P は直線 AC 上にあるので、 $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$ とおける。このとき $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4k \\ 2-2k \\ 3-2k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。点 P は xy 平面上なので z 座標は 0 である。よって

$$\begin{aligned}3-2k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \\ &= 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $3\sqrt{6}$

(2)

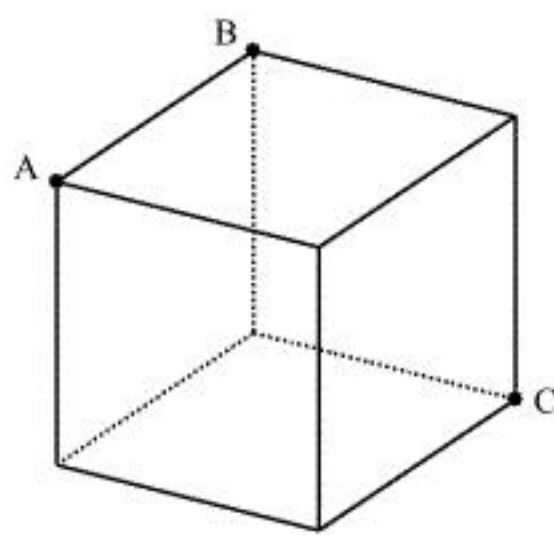
立方体の 3 頂点 A, B, C 間のそれぞれの距離を求めると、

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \\ &= 4 \\ CA &= \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。このとき、

$$AB:BC:CA = 2\sqrt{2}:4:2\sqrt{6} = 1:2:\sqrt{3}$$

となっているので、A, B, C の位置関係は次図のようにになっている。



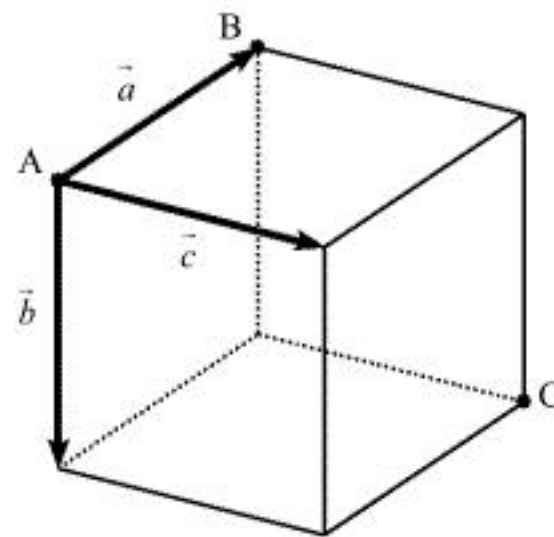
よって AB が立方体の一辺に相当するので、立方体の体積は

$$(2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$$

である。

(答) $16\sqrt{2}$

(3)



$\angle BXC = 60^\circ$ となるのは三角形 BXC が正三角形となるときであり、この条件を満たすような点 X は、点 A に隣接した頂点のうち点 B を除いた 2 点である。点 A から隣接した各頂点へのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ とすれば、

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。 $\vec{b} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ とおくと

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-l \\ -m \\ -n \end{pmatrix}$$

であり、 $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ なので

$$|\vec{b}|^2 = l^2 + m^2 + n^2 = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = l(4-l) - m^2 - n^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2m - 2n = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①, ②, ③より

$$l = 2, \quad m = \pm\sqrt{2}, \quad n = \mp\sqrt{2} \quad (\text{複合同順})$$

である。ここでは $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の区別をしていないので、

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と定めれば、

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

なので、点 X の座標は

$$(4, 2+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}), (4, 2-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$$

である。

(答) $(4, 2+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}), (4, 2-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$

5

(1)

$\theta=0$ のとき、回転体は半球になるので

$$V(0)=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi$$

である。

$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき、回転軸を t 軸として、 $0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq t\leq 1$ の範囲に分けて考える。

$0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に対応する回転体は半径、高さともに $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円錐である。

$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq t\leq 1$ の範囲に対応する回転体の、 $t=k$ における断面は半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円である。

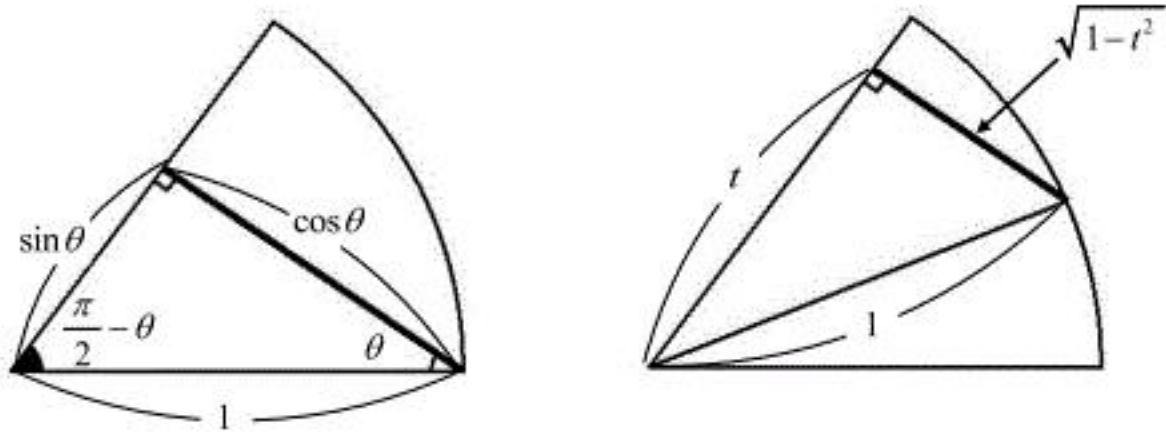
したがって回転体の体積は

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi(1-t^2)dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\pi+\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\pi+\pi\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\ V(0)=\frac{2}{3}\pi,\ V\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi$$

(2)



$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ のときの回転体は、中心角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 、半径 1 のおうぎ形を、弦の両端のどちらかと

中心を結んだ半径で回転させたときにできる回転体と同じになる。よって、回転させる対象をそのようなおうぎ形であるとしてよい。

回転軸を t 軸として、 $0\leq t\leq\sin\theta$ と $\sin\theta\leq t\leq 1$ の範囲に分けて考える。

$0\leq t\leq\sin\theta$ の範囲に対応する回転体は底面の半径が $\cos\theta$ 、高さが $\sin\theta$ の円錐である。

$\sin\theta\leq t\leq 1$ の範囲に対応する回転体の、 $t=k$ における断面は半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円である。

したがって回転体の体積は

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{3}\cdot\pi(\cos\theta)^2\cdot\sin\theta+\int_{\sin\theta}^1\pi(1-t^2)dt \\ &= \frac{\pi}{3}\cos^2\theta\sin\theta+\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\sin\theta}^1 \\ &= \frac{\pi}{3}(1-\sin^2\theta)\sin\theta+\pi\left(1-\frac{1}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}(1-\sin\theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\ V(\theta)=\frac{2\pi}{3}(1-\sin\theta)$$

(3)

$\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のときの回転体は、中心角 θ 、半径 1 のおうぎ形を、弦の両端のどちらかと中心

を結んだ半径で回転させたときにできる回転体と同じになる。したがって、 $\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ の

ときの $V(\theta)$ は、(2)の結果において θ を $\frac{\pi}{2}-\theta$ に置き換えて

$$V(\theta)=\frac{2\pi}{3}\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\theta)$$

となる。

$V(\theta)$ を微分すると、 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ のとき

$$\frac{d}{d\theta}V(\theta)=-\frac{2\pi}{3}\cos\theta\leq 0$$

より、 $V(\theta)$ はこの範囲では単調減少関数であり、 $\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{d}{d\theta}V(\theta)=\frac{2\pi}{3}\sin\theta> 0$$

より、 $V(\theta)$ はこの範囲では単調増加関数である。したがって、 $V(\theta)$ が最小になるのは $\theta=\frac{\pi}{4}$

のときである。

$$(\text{答})\ \theta=\frac{\pi}{4}$$