

(1)

$$10^n < \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

について、底を10とする対数をとると

$$n < m \log_{10} \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n < (1 - 2 \log_{10} 2)m$$

$$\Leftrightarrow 5n < 5(1 - 2 \log_{10} 2)m$$

となる。ここで

$$5(1 - 2 \log_{10} 2) = 5(1 - 2 \times 0.3010) = 1.99 < 2$$

であるから、

$$5n < 2m$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \frac{1}{5000} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

について、底を10とする対数をとると

$$n \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \log_{10} \left(\frac{2}{10^4}\right) < (n-1) \log_{10} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right) < \log_{10} 2 - 4 < (n-1) \left(\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2\right)$$

$$\Leftrightarrow n-1 < \frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} < n$$

となる。ここで、

$$\frac{\log_{10} 2 - 4}{\frac{1}{2} \log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{0.3010 - 4}{\frac{1}{2} \times 0.4771 - 0.3010} = 59.23 \dots$$

であり、 n は自然数なので

$$n = 60$$

である。

(答) $n = 60$

2

(1)

$y = -x^2$ の両辺を x で微分すると
 $y' = -2x$

となる。よって点 $(1, -1)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y = -2 \cdot 1 \cdot (x - 1) - 1 = -2x + 1$$

となる。

(答) $y = -2x + 1$

(2)

$y = ax^2 + bx + c$ の両辺を x で微分すると
 $y' = 2ax + b$

となる。 C_2 が点 $(0, 2)$, $(1, -1)$ を通り、点 $(1, -1)$ における接線が直線 ℓ であることから

$$\begin{aligned} c &= 2 && \dots \textcircled{1} \\ a + b + c &= -1 && \dots \textcircled{2} \\ 2a + b &= -2 && \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を a, b, c について解くと

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 2$$

となる。

(答) $a = 1, \quad b = -4, \quad c = 2$

(3)

直線 $y = -kx$ と C_1, C_2 で囲まれた部分の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。

$y = -kx$ と C_1 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -kx &= -x^2 \\ \Leftrightarrow x(x - k) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, k \end{aligned}$$

であり、 C_1 は上に凸な放物線なので、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^k \\ &= \frac{k^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

$y = -kx$ と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -kx &= x^2 - 4x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (k - 4)x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

の解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると、2 つの実数解が存在する条件は

$$\begin{aligned} D &= (k - 4)^2 - 4 \cdot 2 = k^2 - 8k + 8 > 0 \\ \Leftrightarrow k &< 4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2} < k && \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。 k がこの範囲にあると仮定して、この 2 次方程式の 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解

と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 4 - k, \quad \alpha\beta = 2$$

が成り立っている。 C_2 は下に凸な放物線なので、 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -kx - (x^2 - 4x + 2) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ x^2 + (k - 4)x + 2 \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} (k^2 - 8k + 8)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$S_1 = S_2$ となるとき、

$$k^3 = (k^2 - 8k + 8)^{\frac{3}{2}}$$

より、

$$k = 1$$

となる。これは $\textcircled{4}$ の範囲に含まれているので、適する。

(答) $k = 1$

(1)

数列 $\{c_n\}$ を群数列とみなして、第 n 群を $\{na, (n-1)a+b, \dots, a+(n-1)b, nb\}$ とする。第 n 群の

項数は $n+1$ であるので、第 n 群までの項数の総計を $f(n)$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=1}^n (k+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2}n(n+3) \end{aligned}$$

である。

$$f(8) = 44, f(9) = 54$$

であるので、 c_{50} は第 9 群の第 6 項である。よって

$$c_{50} = 4a + 5b$$

である。

(答) $c_{50} = 4a + 5b$

(2)

第 n 群の項の和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= na + \{(n-1)a+b\} + \dots + \{a+(n-1)b\} + nb \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(a+b) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} c_n &= \sum_{n=1}^8 S(n) + 9a + (8a+b) + (7a+2b) + (6a+3b) + (5a+4b) + (4a+5b) \\ &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \right) + 39a + 15b \\ &= 159a + 135b \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{n=1}^{50} c_n = 159a + 135b$

(3)

$a=2, b=5$ のとき、任意の自然数 n について第 n 群の要素は単調増加列になるように並んで

いる。よって第 n 群の最大の項は nb なので、第 $(n+1)$ 群の項の中で初めて nb よりも大きくなる

項を考えると、

$$\begin{aligned} nb - \{2a + (n-1)b\} &= -2a + b = 1 > 0 \\ nb - (a + nb) &= -a = -2 < 0 \end{aligned}$$

より、 $a+nb$ で初めて nb よりも大きくなることが分かる。したがって数列 $\{d_n\}$ は

$$a, b, a+b, 2b, \dots, a+(n-1)b, nb, a+nb, (n+1)b, \dots$$

となる。初項から第 $2n$ 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} d_k &= a + b + (a+b) + 2b + \dots + \{a+(n-1)b\} + nb \\ &= na + 2 \sum_{k=1}^{n-1} kb + nb \\ &= na + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)nb + nb \\ &= n(a+nb) \\ &= n(2+5n) \end{aligned}$$

となる。

(答) $n(2+5n)$

(1)

点 P は線分 OA を 1:2 に、点 Q は線分 PB を $s:1-s$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OB} = \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b}$$

(2)

直線 OQ と辺 AB の交点を R とすると、 k を実数として

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OQ}$$

とおける。点 R は辺 AB を 3:4 に内分する点なので

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4k}{7}\vec{a} + \frac{3k}{7}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので、①と②の係数を比較して

$$\frac{1-s}{3} = \frac{4k}{7} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$s = \frac{3k}{7} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③、④を k, s について解くと

$$k = \frac{7}{15}, \quad s = \frac{1}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{5}$$

(3)

点 G は $\triangle OAB$ の重心なので

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OG} \\ &= \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{3s-1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle OAB$ が $OA = OB$ の直角二等辺三角形なので、

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GQ}|^2 &= \left(\frac{s}{3}\right)^2 |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{3s-1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{3s-1}{3}\right)^2 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{|\vec{a}|^2}{9} (10s^2 - 6s + 1) \\ &= \frac{10|\vec{a}|^2}{9} \left\{ \left(s - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{100} \right\} \end{aligned}$$

となるので、線分 GQ の長さが最小になるのは $s = \frac{3}{10}$ のときである。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{3}{10}$$

5

(1)

$\theta=0$ のとき、回転体は半球になるので

$$V(0)=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi$$

である。

$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき、回転軸を t 軸として、 $0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq t\leq 1$ の範囲に分けて考える。

$0\leq t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に対応する回転体は半径、高さともに $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円錐である。

$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq t\leq 1$ の範囲に対応する回転体の、 $t=k$ における断面は半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円である。

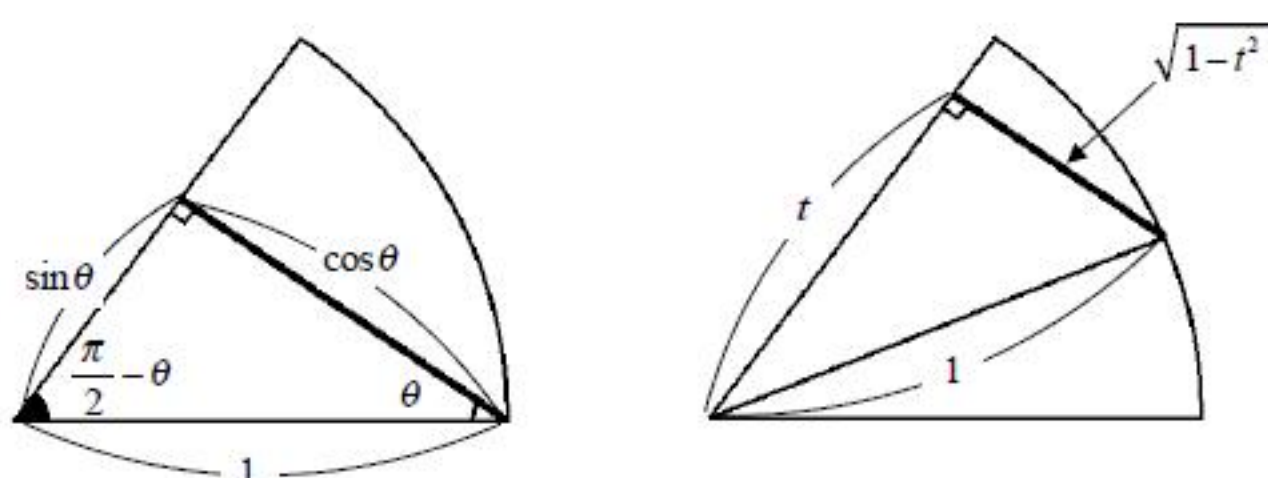
したがって回転体の体積は

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi(1-t^2)dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\pi+\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}\pi+\pi\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\ V(0)=\frac{2}{3}\pi,\ V\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi$$

(2)



$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ のときの回転体は、中心角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 、半径 1 のおうぎ形を、弦の両端のどちらかと中心を結んだ半径で回転させたときにできる回転体と同じになる。よって、回転させる対象をそのようなおうぎ形であるとしてよい。

回転軸を t 軸として、 $0\leq t\leq\sin\theta$ と $\sin\theta\leq t\leq 1$ の範囲に分けて考える。

$0\leq t\leq\sin\theta$ の範囲に対応する回転体は底面の半径が $\cos\theta$ 、高さが $\sin\theta$ の円錐である。

$\sin\theta\leq t\leq 1$ の範囲に対応する回転体の、 $t=k$ における断面は半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円である。

したがって回転体の体積は

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{3}\cdot\pi(\cos\theta)^2\cdot\sin\theta+\int_{\sin\theta}^1\pi(1-t^2)dt \\ &= \frac{\pi}{3}\cos^2\theta\sin\theta+\pi\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{\sin\theta}^1 \\ &= \frac{\pi}{3}(1-\sin^2\theta)\sin\theta+\pi\left(1-\frac{1}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}(1-\sin\theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\ V(\theta)=\frac{2\pi}{3}(1-\sin\theta)$$

(3)

$\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のときの回転体は、中心角 θ 、半径 1 のおうぎ形を、弦の両端のどちらかと中心を結んだ半径で回転させたときにできる回転体と同じになる。したがって、 $\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ の

ときの $V(\theta)$ は、(2)の結果において θ を $\frac{\pi}{2}-\theta$ に置き換えて

$$V(\theta)=\frac{2\pi}{3}\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\theta)$$

となる。

$V(\theta)$ を微分すると、 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ のとき

$$\frac{d}{d\theta}V(\theta)=-\frac{2\pi}{3}\cos\theta\leq 0$$

より、 $V(\theta)$ はこの範囲では単調減少関数であり、 $\frac{\pi}{4}<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{d}{d\theta}V(\theta)=\frac{2\pi}{3}\sin\theta> 0$$

より、 $V(\theta)$ はこの範囲では単調増加関数である。したがって $V(\theta)$ が最小になるのは $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときである。

$$(\text{答})\ \theta=\frac{\pi}{4}$$