

1

(1)

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{2011} &= 2011 \log_{10} 2 \\ &= 2011 \cdot 0.3010 \\ &= 605.311\end{aligned}$$

であるから,

$$10^{605} < 2^{2011} < 10^{606}$$

である。したがって、 2^{2011} は 606 桁の整数である。

(答) 606 桁

(2)

$$2^{2011} = 10^{605+0.311}$$

であるから,

$$\begin{aligned}10^{605+0.3010} &< 2^{2011} < 10^{605+0.4771} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 10^{605} &< 2^{2011} < 3 \cdot 10^{605}\end{aligned}$$

である。したがって、 2^{2011} の最高位の数は 2 である。

(答) 2

(1)

$GH=0$ となるとき, G と H が一致するので, $\ell \perp AB$ である。

ここで, 直線 AB の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから, ℓ の傾きが 2 であればよい。

したがって, このとき,

$$\tan \alpha = 2$$

となる。

(答) $\tan \alpha = 2$

(2)

$$AG = 2 \sin \theta$$

$$GH = |2 \cos \theta - \sin \theta|$$

$$HB = \cos \theta$$

であるから,

$$\begin{aligned} L &= AG + GH + HB \\ &= 2 \sin \theta + \cos \theta + |2 \cos \theta - \sin \theta| \end{aligned}$$

である。(1)を踏まえ, θ, α の大小で場合分けをする。

[1] $0 \leq \theta < \alpha$ のとき

$$\begin{aligned} L &= 2 \sin \theta + \cos \theta + (2 \cos \theta - \sin \theta) \\ &= \sin \theta + 3 \cos \theta \\ &= \sqrt{10} \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

である。ただし, β は $\tan \beta = 3$ をみたす。

[2] $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

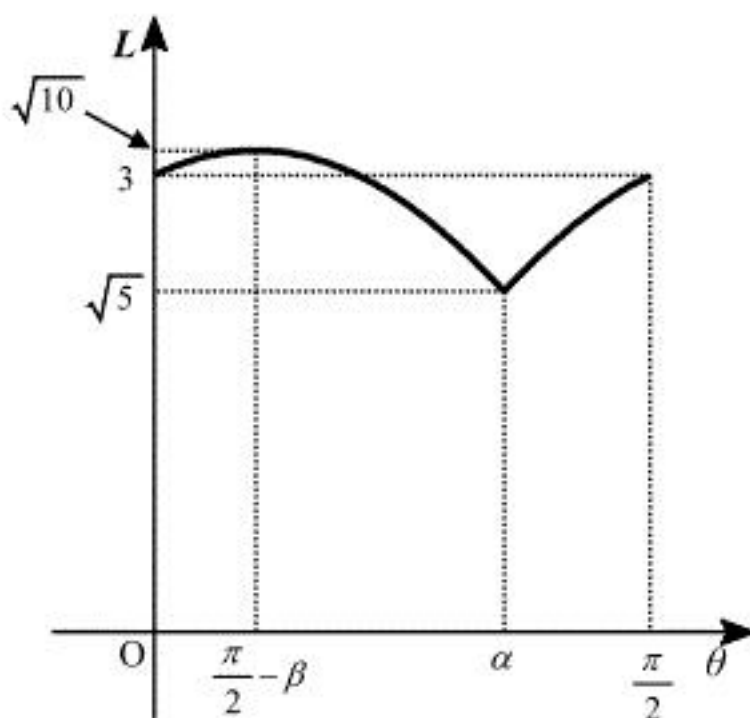
$$\begin{aligned} L &= 2 \sin \theta + \cos \theta - (2 \cos \theta - \sin \theta) \\ &= 3 \sin \theta - \cos \theta \\ &= \sqrt{10} \sin(\theta - \gamma) \end{aligned}$$

である。ただし, γ は $\tan \gamma = \frac{1}{3}$ をみたす。

以上, [1], [2]と, 不等式

$$\beta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \alpha, \text{ および, } \gamma < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

に注意して, L のグラフを書くと次図のようになる。



グラフより, $\tan \theta = \tan \alpha = 2$ のとき L は最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

(答) L の最小値 $\sqrt{5}$ ($\tan \theta = 2$ のとき)

(3)

(2)のグラフより,

$$\tan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{3}$$

のとき L は最大値 $\sqrt{10}$ をとる。

(答) L の最大値 $\sqrt{10}$ ($\tan \theta = \frac{1}{3}$ のとき)

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

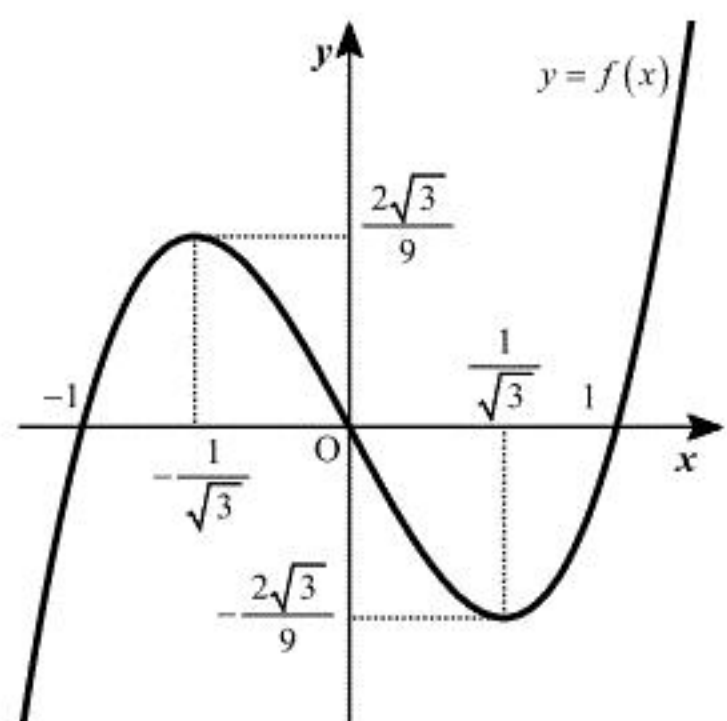
であるから、関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

増減表より、

$y = f(x)$ は $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり、 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。

また、グラフは次のようになる。



(答) 極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ($x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき)

極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ($x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき)

前図

(2)

$y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標を求める。 $a > 0$ より、上図から $x < 0$ の範囲

では $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフは共有点をもたない。したがって、 $x \geq 0$ の範囲で考えればよい。

[1] $0 \leq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x)| &= g(x) \\ \Leftrightarrow -(x^3 - x) &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x^2 - (1-a)\} &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x\{x^2 - (1-a)\} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \sqrt{1-a}$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } x\{x^2 - (1-a)\} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

である。

[2] $x \geq 1$ のとき

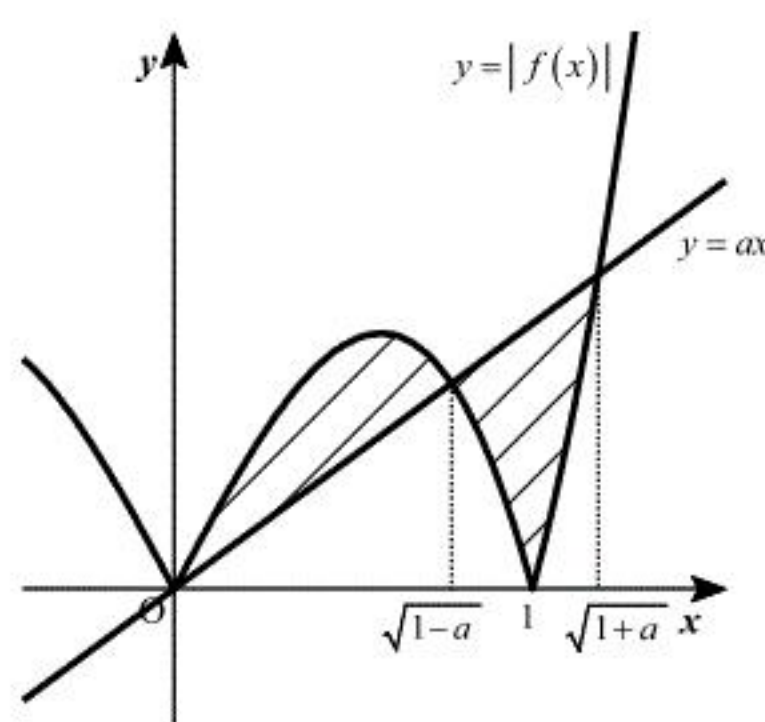
$$\begin{aligned} |f(x)| &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^3 - x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x^2 - (1+a)\} &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{1+a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

したがって、 $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる面積を S とすると、グラフの交わり

方により、次のように場合分けできる。

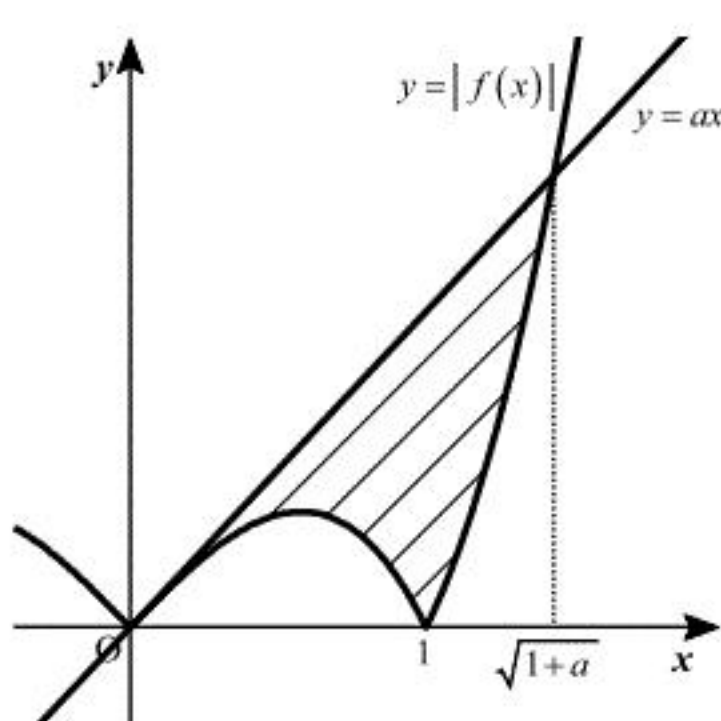
[1] $0 < a < 1$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{1-a}} (-x^3 + x - ax) dx + \int_{\sqrt{1-a}}^1 (ax + x^3 - x) dx + \int_1^{\sqrt{1+a}} (ax - x^3 + x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_0^{\sqrt{1-a}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_{\sqrt{1-a}}^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(1+a)x^2 \right]_1^{\sqrt{1+a}} \\ &= -\frac{1}{4}(1-a)^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{4}(1-a)^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}(1+a)^2 + \frac{1}{2}(1+a)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1+a) \\ &= \frac{1}{2}(1-a)^2 + \frac{1}{4}(1+a)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \geq 1$ のとき、



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (ax + x^3 - x) dx + \int_1^{\sqrt{1+a}} (ax - x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(1+a)x^2 \right]_1^{\sqrt{1+a}} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{4}(1+a)^2 + \frac{1}{2}(1+a)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1+a) \\ &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \quad \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } \quad \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $0 < a < 1$ のとき $\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$

$a \geq 1$ のとき $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}$

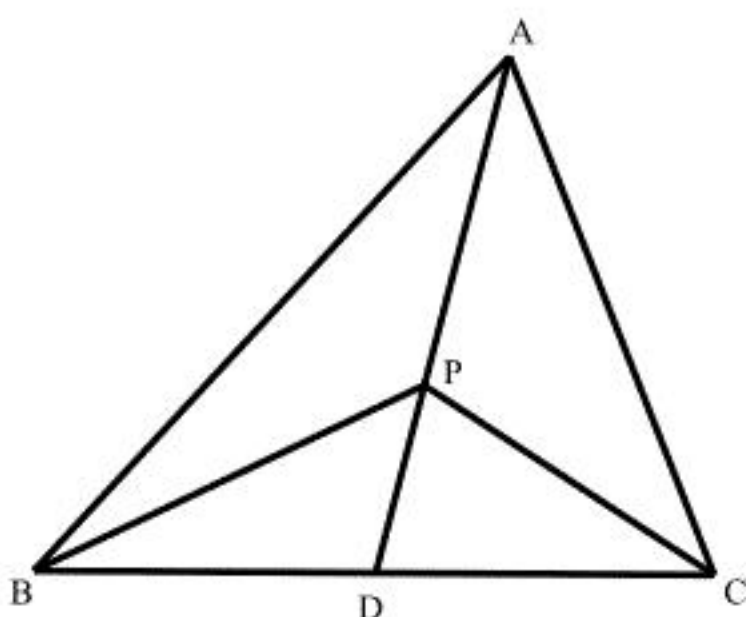
(1)

$$\begin{aligned}
& \ell \overrightarrow{AP} + m \overrightarrow{BP} + n \overrightarrow{CP} = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \ell \overrightarrow{AP} + m(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{\ell + m + n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC}) \quad (\because \ell + m + n \neq 0)
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\ell + m + n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

(2)



上図のように点 D を定めると、 k を実数として、

$$\overrightarrow{AD} = k(m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned}
& km + kn = 1 \\
& \therefore k = \frac{1}{m + n}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{m + n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

である。したがって、

$$AD : AP = \frac{1}{m + n} : \frac{1}{\ell + m + n} = (\ell + m + n) : (m + n)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
& (\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle BCP \text{ の面積}) \\
& = AD : PD \\
& = AD : AD - AP \\
& = (\ell + m + n) : \{(\ell + m + n) - (m + n)\} \\
& = (\ell + m + n) : \ell \\
& = 1 : \frac{\ell}{\ell + m + n}
\end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ の面積を 1 とするとき、 $\triangle BCP$ の面積は $\frac{\ell}{\ell + m + n}$ となる。

同様に、A, B, C の立場を入れ替えて考えることにより、

$$\triangle CAP \text{ の面積は } \frac{m}{\ell + m + n}$$

$$\triangle ABP \text{ の面積は } \frac{n}{\ell + m + n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \triangle BCP \text{ の面積} : \frac{\ell}{\ell + m + n}$$

$$\triangle CAP \text{ の面積} : \frac{m}{\ell + m + n}$$

$$\triangle ABP \text{ の面積} : \frac{n}{\ell + m + n}$$

(1)

$$1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

$$1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

であるから、1365 と 1560 の最大公約数は、

$$3 \cdot 5 \cdot 13 = 195$$

となる。

(答) 195

(2)

$$3x \leq 2y \leq z$$

より、

$$y \geq \frac{3}{2}x, \quad z \geq 3x$$

であるから、

$$1365 = xyz \geq x \cdot \frac{3}{2}x \cdot 3x = \frac{9}{2}x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq \frac{2730}{9} = 303.\dots < 343 = 7^3$$

$$\therefore x < 7 \quad (\because x \text{ は整数})$$

となる。また、

$$xyz = 1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、 x は 2 以上の整数であるから、

$$x = 3 \quad \text{または} \quad x = 5$$

であることがわかる。

[1] $x = 3$ のとき

①より、

$$yz = 5 \cdot 7 \cdot 13$$

であるから、

$$3x = 9 \leq 2y \leq z$$

を満たす 2 以上の整数 x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

となる。

[2] $x = 5$ のとき

①より、

$$yz = 3 \cdot 7 \cdot 13$$

であるが、このとき、

$$3x = 15 \leq 2y \leq z$$

を満たす 2 以上の整数 x, y, z の組は存在しない。

以上[1], [2]より、求める x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

となる。

(答) $(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$