

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2^{2011} &= 2011 \log_{10} 2 \\
 &= 2011 \cdot 0.3010 \\
 &= 605.311
 \end{aligned}$$

であるから,

$$10^{605} < 2^{2011} < 10^{606}$$

である。したがって、 2^{2011} は 606 桁の整数である。

(答) 606 桁

(2)

$$2^{2011} = 10^{605+0.311}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 10^{605+0.3010} &< 2^{2011} < 10^{605+0.4771} \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot 10^{605} &< 2^{2011} < 3 \cdot 10^{605}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 2^{2011} の最高位の数は 2 である。

(答) 2

(1)

求める接線は点 $A(\sqrt{2}, 0)$ を通るので、点 A を通り y 軸に平行な直線が C_1 の接線とならないことに注意すると、 k を実数としてその方程式は、

$$\begin{aligned} y &= k(x - \sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow kx - y - \sqrt{2}k &= 0 \end{aligned}$$

とおける。また、 C_1 に接するので、原点との距離は 1 であり、

$$\begin{aligned} \frac{|-\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2k^2 &= k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow k &= \pm 1 \end{aligned}$$

である。したがって、求める接線の方程式は、

$$y = x - \sqrt{2}, y = -x + \sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) y = x - \sqrt{2}, y = -x + \sqrt{2}$$

(2)

点 P の座標を (p, q) とおき、線分 BP の中点の座標を (X, Y) とおくと、

$$\begin{cases} X = \frac{p+1}{2} \\ Y = \frac{q}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2X - 1 \\ q = 2Y \end{cases}$$

である。ここで、点 P は C_1 上の点であるから、

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (2X - 1)^2 + (2Y)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $P(1, 0)$ のとき線分 BP が存在しないことに注意すると、 C_2 の方程式は、

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad ((x, y) = (1, 0) \text{ を除く})$$

となる。

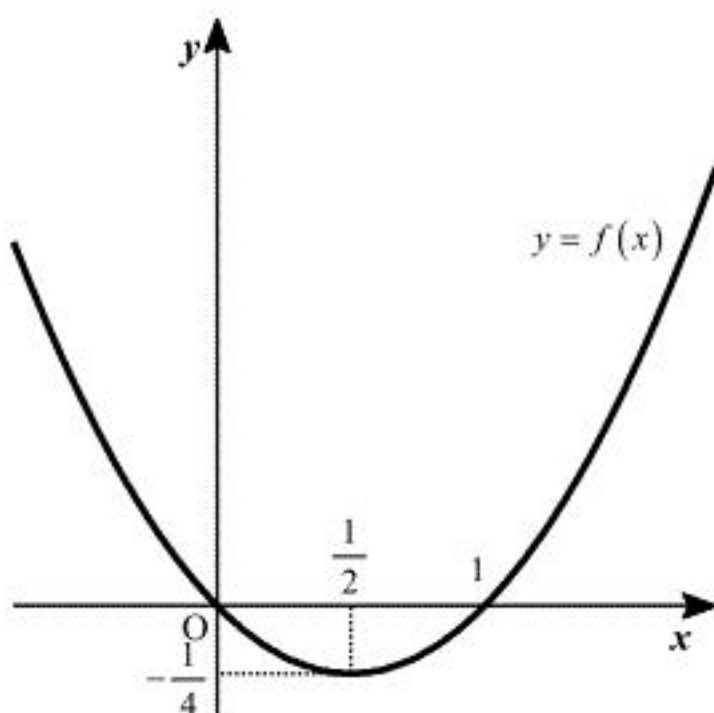
$$(\text{答}) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad ((x, y) = (1, 0) \text{ を除く})$$

(1)

$$y = f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

であるから、 $y = f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のときに極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

また、グラフは次のようになる。



(答) 極大値なし

極小値 $-\frac{1}{4}$ ($x = \frac{1}{2}$ のとき)

(2)

$y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標を求める。 $a > 0$ より、上図から $x < 0$ の範囲

では $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフは共有点をもたない。したがって、 $x \geq 0$ の範囲で考えればよい。

[1] $0 \leq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x)| &= g(x) \\ \Leftrightarrow -(x^2 - x) &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (1 - a)\} &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x\{x - (1 - a)\} = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1 - a$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } x\{x - (1 - a)\} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

である。

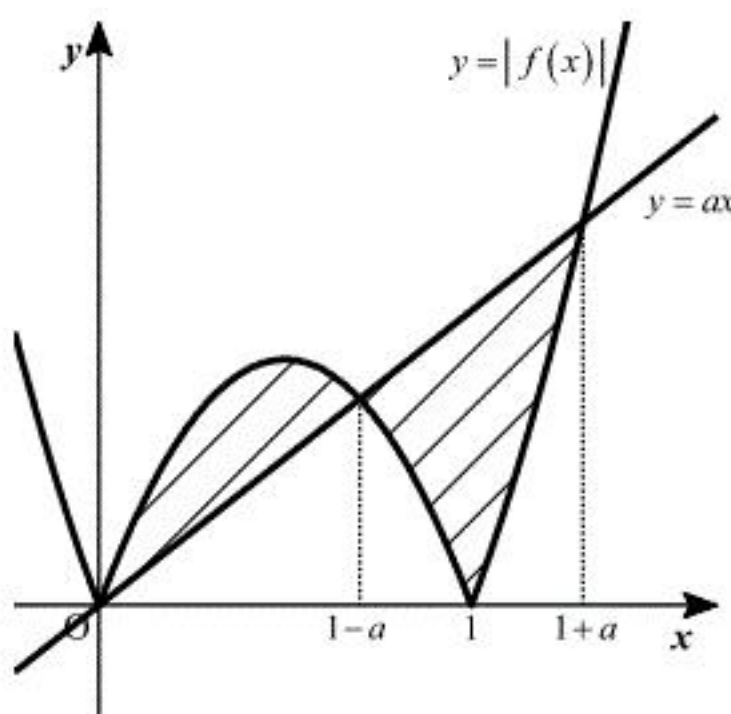
[2] $x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x)| &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^2 - x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (1 + a)\} &= 0 \\ \therefore x &= 1 + a \end{aligned}$$

である。

したがって、 $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる面積を S とすると、 a と 1 の大小により、次のような場合分けが生じる。

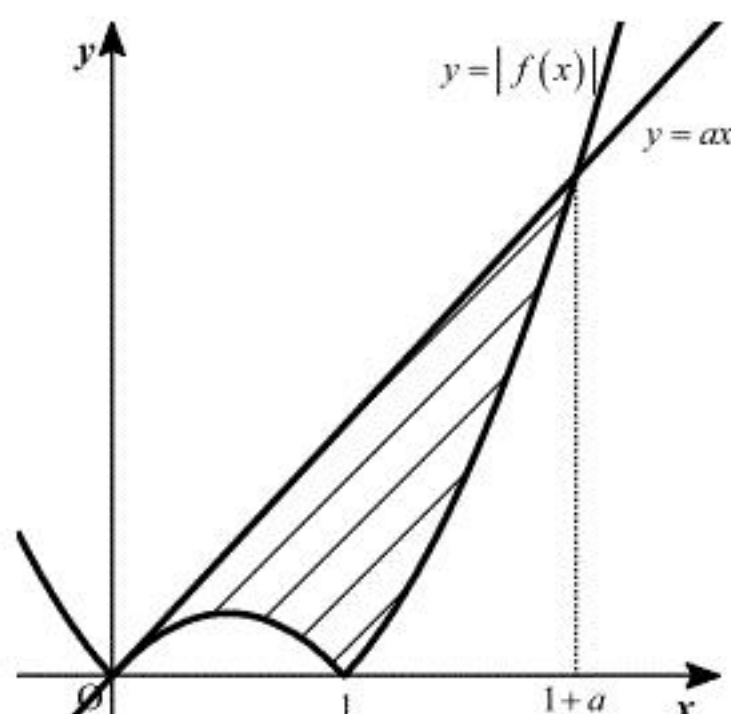
[1] $0 < a < 1$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1-a} (-x^2 + x - ax) dx + \int_{1-a}^1 (ax + x^2 - x) dx + \int_1^{1+a} (ax - x^2 + x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_0^{1-a} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_{1-a}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1+a)x^2 \right]_1^{1+a} \\ &= -\frac{1}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{2}(1-a)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{2}(1-a)^3 \\ &\quad - \frac{1}{3}(1+a)^3 + \frac{1}{2}(1+a)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1+a) \\ &= \frac{1}{3}(1-a)^3 + \frac{1}{6}(1+a)^3 - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \geq 1$ のとき、



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (ax + x^2 - x) dx + \int_1^{1+a} (ax - x^2 + x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1-a)x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1+a)x^2 \right]_1^{1+a} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{3}(1+a)^3 + \frac{1}{2}(1+a)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1+a) \\ &= \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2]より求める面積は

$$0 < a < 1 \text{ のとき } -\frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}$$

となる。

$$(答) \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } -\frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}$$

(1)

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$$

(2)

$$3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 5(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$$

(1)

$$1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

$$1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

であるから、1365 と 1560 の最大公約数は、

$$3 \cdot 5 \cdot 13 = 195$$

となる。

(答) 195

(2)

$$3x \leq 2y \leq z$$

より、

$$y \geq \frac{3}{2}x, \quad z \geq 3x$$

であるから、

$$1365 = xyz \geq x \cdot \frac{3}{2}x \cdot 3x = \frac{9}{2}x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq \frac{2730}{9} = 303.\cdots < 343 = 7^3$$

$$\therefore x < 7 \quad (\because x \text{ は整数})$$

となる。また、

$$xyz = 1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、 x は 2 以上の整数であるから、

$$x = 3 \quad \text{または} \quad x = 5$$

であることがわかる。

[1] $x = 3$ のとき

①より、

$$yz = 5 \cdot 7 \cdot 13$$

であるから、

$$3x = 9 \leq 2y \leq z$$

を満たす 2 以上の整数 x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

となる。

[2] $x = 5$ のとき

①より、

$$yz = 3 \cdot 7 \cdot 13$$

であるが、このとき、

$$3x = 15 \leq 2y \leq z$$

を満たす 2 以上の整数 x, y, z の組は存在しない。

以上[1], [2]より、求める x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

となる。

(答) $(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$