

1

(1)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \left\{3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)\right\} \\
 &\quad -\left\{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+3x\right)\right\} \\
 &= (3\cos x+\cos 3x)-(3\cos x+\cos 3x) \\
 &= 0 \\
 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)
 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ のグラフは直線 $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3\cos x - 3\cos 3x \\
 &= 3(\cos x - \cos 3x) \\
 &= 3 \cdot (-2) \sin \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2} \\
 &= 6\sin x \sin 2x
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < x < \pi$ のとき $\sin x > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 2x &= 0 \\
 \therefore x &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

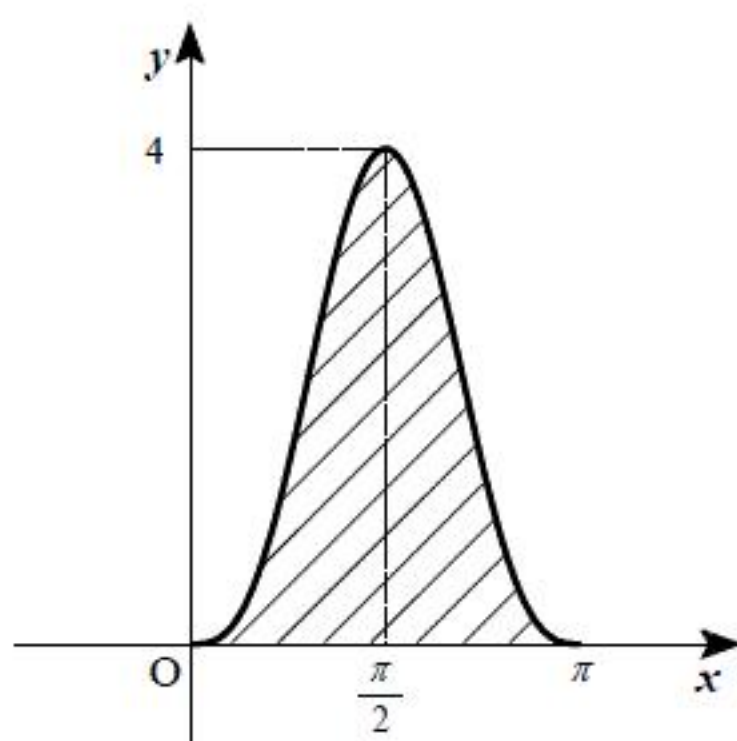
であり、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	4	$\searrow$	(0)

増減表より、 $f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}$ のとき極大値 4 をとる。

(答) 極大値 4 ($x=\frac{\pi}{2}$ のとき)

(3)



求める体積は、

$$\begin{aligned}
 \pi \int_0^\pi (3\sin x - \sin 3x)^2 dx &= \pi \int_0^\pi (9\sin^2 x - 6\sin x \sin 3x + \sin^2 3x) dx \\
 &= \pi \int_0^\pi \left\{ 9 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + 3(\cos 4x - \cos 2x) + \frac{1-\cos 6x}{2} \right\} dx \\
 &= \pi \int_0^\pi \left(5 - \frac{15}{2}\cos 2x + 3\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x \right) dx \\
 &= \pi \left[5x - \frac{15}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x \right]_0^\pi \\
 &= 5\pi^2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $5\pi^2$

(1)

$GH=0$ となるとき, G と H が一致するので, $\ell \perp AB$ である。

ここで, 直線 AB の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから, ℓ の傾きが 2 であればよい。

したがって, このとき,

$$\tan \alpha = 2$$

となる。

(答) $\tan \alpha = 2$

(2)

$$AG = 2 \sin \theta$$

$$GH = |2 \cos \theta - \sin \theta|$$

$$HB = \cos \theta$$

であるから,

$$L = AG + GH + HB$$

$$= 2 \sin \theta + \cos \theta + |2 \cos \theta - \sin \theta|$$

である。(1)を踏まえ, θ, α の大小で場合分けをする。

[1] $0 \leq \theta < \alpha$ のとき

$$L = 2 \sin \theta + \cos \theta + (2 \cos \theta - \sin \theta)$$

$$= \sin \theta + 3 \cos \theta$$

$$= \sqrt{10} \sin(\theta + \beta)$$

である。ただし, β は $\tan \beta = 3$ をみたす。

[2] $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$L = 2 \sin \theta + \cos \theta - (2 \cos \theta - \sin \theta)$$

$$= 3 \sin \theta - \cos \theta$$

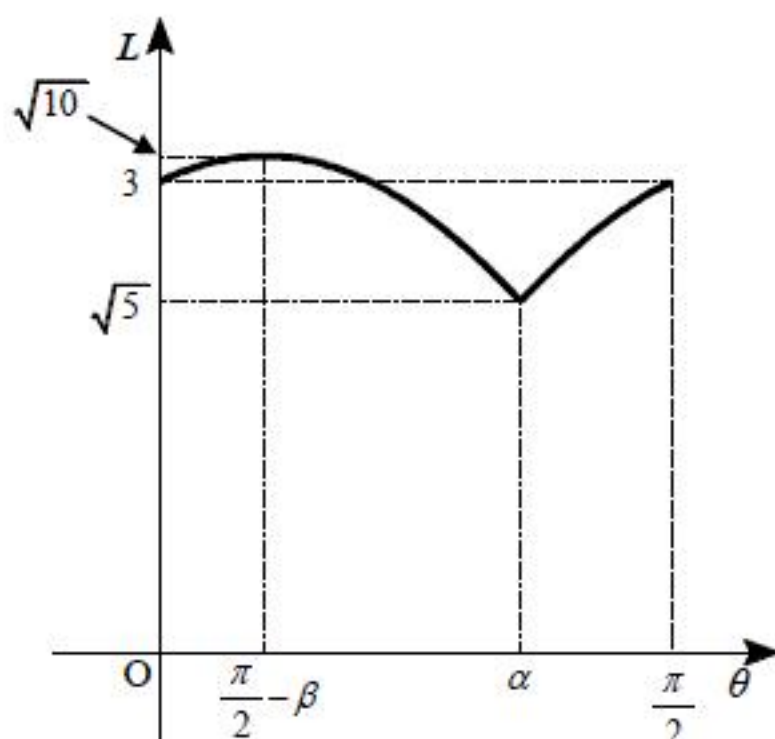
$$= \sqrt{10} \sin(\theta - \gamma)$$

である。ただし, γ は $\tan \gamma = \frac{1}{3}$ をみたす。

以上, [1], [2]と, 不等式

$$\beta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \alpha, \text{ および, } \gamma < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

に注意して, L のグラフを書くと次図のようになる。



グラフより, $\tan \theta = \tan \alpha = 2$ のとき L は最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

(答) L の最小値 $\sqrt{5}$ ($\tan \theta = 2$ のとき)

(3)

(2)のグラフより,

$$\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{3}$$

のとき L は最大値 $\sqrt{10}$ をとる。

(答) L の最大値 $\sqrt{10}$ ($\tan \theta = \frac{1}{3}$ のとき)

(1)

 $y = x^2$ を微分すると、

$$y' = 2x$$

であるから、曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は、

$$y = 2a(x - a) + a^2$$

$$\therefore y = 2ax - a^2$$

とおける。この接線が点 $P\left(t, \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)$ を通るとき、

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 2at - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ta + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0$$

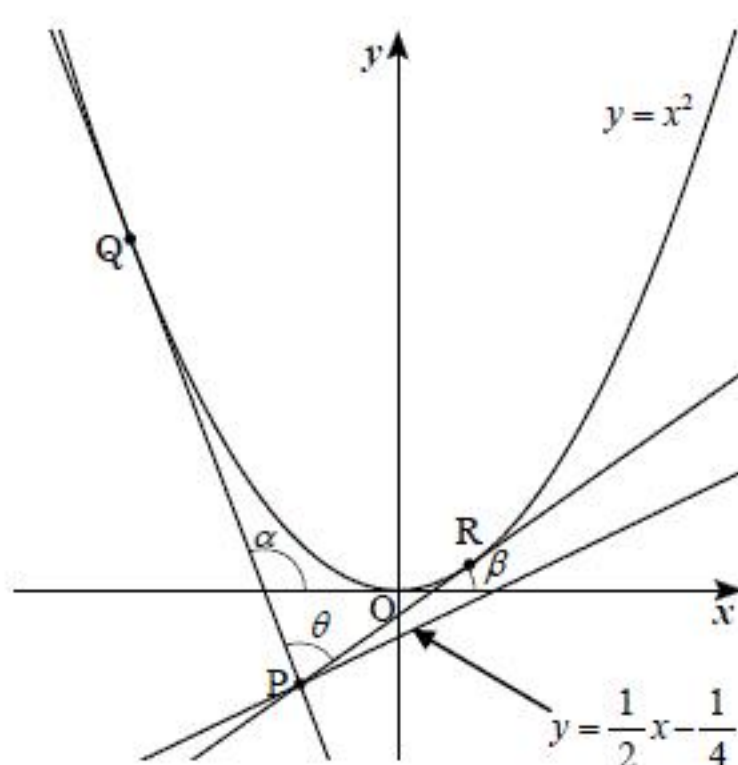
となる。この2次方程式の判別式を D とすれば、

$$\frac{D}{4} = t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16} > 0$$

となるから、この2次方程式は、常に相異なる2つの実数解をもち、それは

$$a = t \pm \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}$$

となる。



上図のように α, β を定めると、

$$\theta = \begin{cases} \alpha - \beta & t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ \pi + \alpha - \beta & t \geq \frac{1}{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

であり、また

$$\begin{cases} \tan \alpha = 2\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right) \\ \tan \beta = 2\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right) - 2\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right)}{1 + 2\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right) \cdot 2\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}\right)} \\ &= \frac{-4\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}}{1 + 4\left\{t^2 - \left(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\right\}} \\ &= \frac{-2\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}}{t} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \tan \theta = \frac{-2\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}}{t}$$

(2)

$t > 0$ のとき、 $\tan \theta < 0$

$t < 0$ のとき、 $\tan \theta > 0$

であるから、 θ が最大となるとき $t > 0$ で $\tan \theta$ が最大となればよい。

このとき、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{-2\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}}{t} \\ &= -2\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^2} \\ &= -2\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\frac{1}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

のとき、 $\tan \theta$ は最大値、

$$-2\sqrt{\frac{3}{4}} = -\sqrt{3}$$

をとり、このとき点 P の座標は $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ であり、 θ は最大値 $\frac{2}{3}\pi$ をとる。

$$(\text{答}) \theta \text{ の最大値 } \frac{2}{3}\pi, \text{ 点 } P \text{ の座標 } \left(1, \frac{1}{4}\right)$$

(1)

$$\ell \overrightarrow{AP} + m \overrightarrow{BP} + n \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

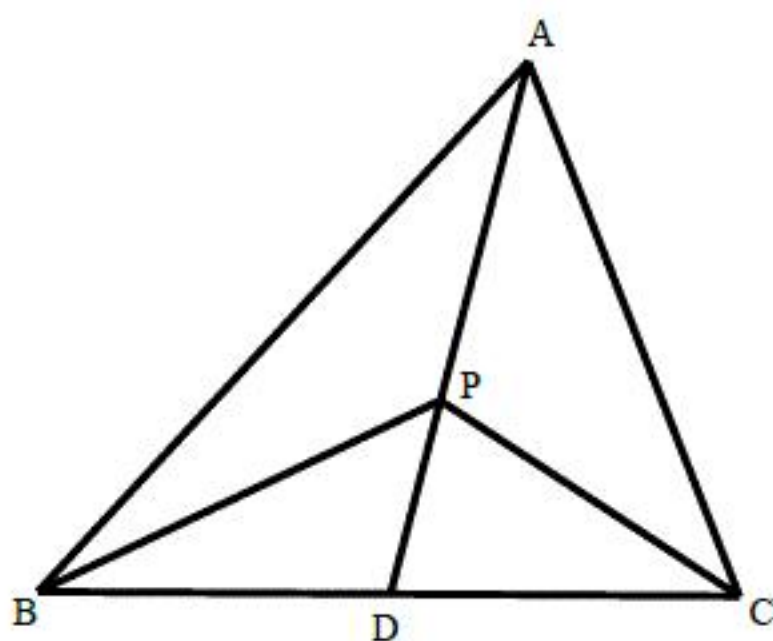
$$\Leftrightarrow \ell \overrightarrow{AP} + m(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{\ell + m + n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\ell + m + n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

(2)



上図のように点 D を定めると、 k を実数として、

$$\overrightarrow{AD} = k(m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

とおける。このとき、

$$km + kn = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{m+n}$$

であるから、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{m+n} (m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC})$$

である。したがって、

$$AD : AP = \frac{1}{m+n} : \frac{1}{\ell + m + n} = (\ell + m + n) : (m + n)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & (\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle BCP \text{ の面積}) \\ &= AD : PD \\ &= AD : AD - AP \\ &= (\ell + m + n) : \{(\ell + m + n) - (m + n)\} \\ &= (\ell + m + n) : \ell \\ &= 1 : \frac{\ell}{\ell + m + n} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ の面積を 1 とするとき、 $\triangle BCP$ の面積は $\frac{\ell}{\ell + m + n}$ となる。

同様に、A, B, C の立場を入れ替えて考えることにより、

$$\triangle CAP \text{ の面積は } \frac{m}{\ell + m + n}$$

$$\triangle ABP \text{ の面積は } \frac{n}{\ell + m + n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \triangle BCP \text{ の面積} : \frac{\ell}{\ell + m + n}$$

$$\triangle CAP \text{ の面積} : \frac{m}{\ell + m + n}$$

$$\triangle ABP \text{ の面積} : \frac{n}{\ell + m + n}$$

(1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(3k+1)(3k+2)}{3k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2}{3k(k+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ 3 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\
&= 3n + \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
&= 3n + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{n(9n+11)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \sum_{k=1}^n a_n = \frac{n(9n+11)}{3(n+1)}$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_n = \frac{n(9n+11)}{3(n+1)}$$

とおくと、 $\sum_{k=1}^n b_k = S_{n^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n b_k &= S_{n^2} \\
&= \frac{9n^4 + 11n^2}{3(n^2 + 1)} \\
&= 3n^2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{n^2}}
\end{aligned}$$

である。 $a_n > 0$ であるから、 $\sum_{k=1}^n b_k$ は単調増加し、

$$n=14 \text{ のとき, } \sum_{k=1}^{14} b_k = 588 + \frac{2}{3 + \frac{3}{14^2}} < 675$$

$$n=15 \text{ のとき, } \sum_{k=1}^{15} b_k = 675 + \frac{2}{3 + \frac{3}{15^2}} > 675$$

である。したがって、 $\sum_{k=1}^{15} b_k \geq 675$ となる最小の n の値は、

$$n=15$$

となる。

(答) $n=15$