

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2^{2011} &= 2011 \log_{10} 2 \\
 &= 2011 \cdot 0.3010 \\
 &= 605.311
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 605 &\leq \log_{10} 2^{2011} < 606 \\
 10^{605} &\leq 2^{2011} < 10^{606}
 \end{aligned}$$

であるから、 2^{2011} は 606 桁の整数である。

(答) 606 桁

(2)

$$2^{2011} = 10^{605.311} = 10^{0.311} \cdot 10^{605}$$

より,

$$\begin{aligned}
 10^{0.3010} \cdot 10^{605} &\leq 2^{2011} < 10^{0.4771} \cdot 10^{605} \\
 \Leftrightarrow 10^{\log_{10} 2} \cdot 10^{605} &\leq 2^{2011} < 10^{\log_{10} 3} \cdot 10^{605} \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot 10^{605} &\leq 2^{2011} < 3 \cdot 10^{605}
 \end{aligned}$$

である。したがって、 2^{2011} の最高位の数は 2 である。

(答) 2

2

(1)

このとき、直線 AB と ℓ は垂直となる。直線 AB の傾きは、

$$\frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

であるから、 ℓ の傾きは 2 である。したがって、

$$\tan \alpha = 2$$

である。

(答) 2

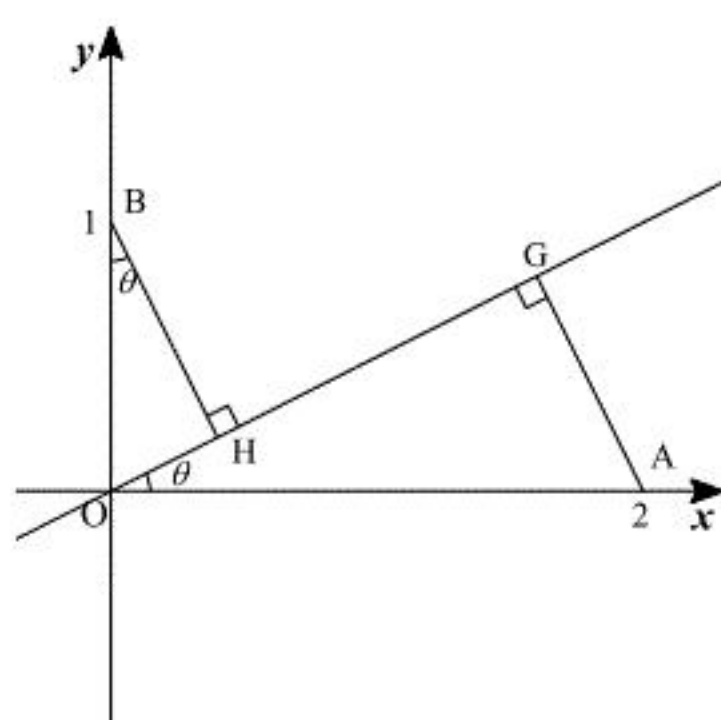
(2)

(1)の結果より、 $\tan \alpha = 2$ および $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。

[1] $0 \leq \theta \leq \alpha$ のとき



$\angle OBH = \theta$ であることから、

$$\begin{cases} BH = \cos \theta \\ AG = 2 \sin \theta \\ HG = OG - OH = 2 \cos \theta - \sin \theta \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}L &= AG + GH + HB \\ &= 2 \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sin \theta + 3 \cos \theta \\ &= \sqrt{10} \sin(\theta + \beta)\end{aligned}$$

となる。ただし、 β は $\tan \beta = 3$ を満たす。ここで、 $\frac{\pi}{4} < \alpha$ かつ $\frac{\pi}{4} < \beta$ より、

$$\beta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$$

であるから、 L の最大値は $\sqrt{10}$ で、このとき

$$\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{3}$$

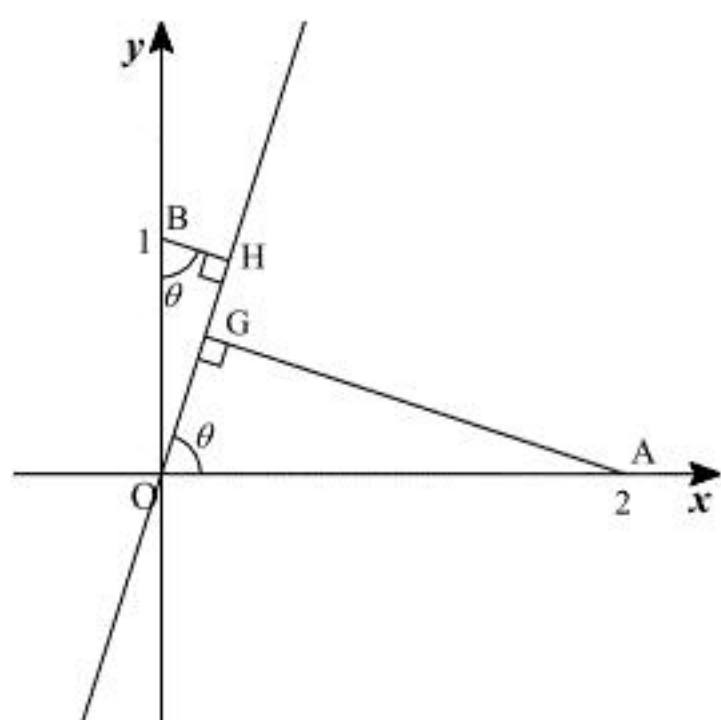
である。また、 L が最小値をとるのは $\theta = 0$ または $\theta = \alpha$ のときであるが、

$$\theta = 0 \text{ のとき } L = 3$$

$$\theta = \alpha \text{ のとき } L = \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

であるから、 L の最小値は $\sqrt{5}$ で、このとき $\tan \theta = 2$ である。

[2] $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき



$$\begin{cases} BH = \cos \theta \\ AG = 2 \sin \theta \\ HG = OH - OG = \sin \theta - 2 \cos \theta \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}L &= AG + GH + HB \\ &= 2 \sin \theta - 2 \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta \\ &= 3 \sin \theta - \cos \theta \\ &= \sqrt{10} \sin(\theta - \gamma)\end{aligned}$$

となる。ただし、 γ は $\tan \gamma = \frac{1}{3}$ を満たす。ここで、 $\tan \gamma < \tan \alpha$ より $\gamma < \alpha$ であることに注

意すると、 L はそれぞれ

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \text{最大値 } 3 \cdot 1 - 0 = 3$$

$$\theta = \alpha \text{ のとき } \text{最小値 } 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

をとる。

以上[1], [2]より、

$$L \text{ の最小値は } \sqrt{5} \text{ で、そのとき } \tan \theta = 2$$

である。

(答) 最小値 $\sqrt{5}$, $\tan \theta = 2$

(3)

(2)の[1], [2]で考察した結果より、

$$L \text{ の最大値は } \sqrt{10} \text{ で、そのとき } \tan \theta = \frac{1}{3}$$

である。

(答) 最大値 $\sqrt{10}$, $\tan \theta = \frac{1}{3}$

3

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

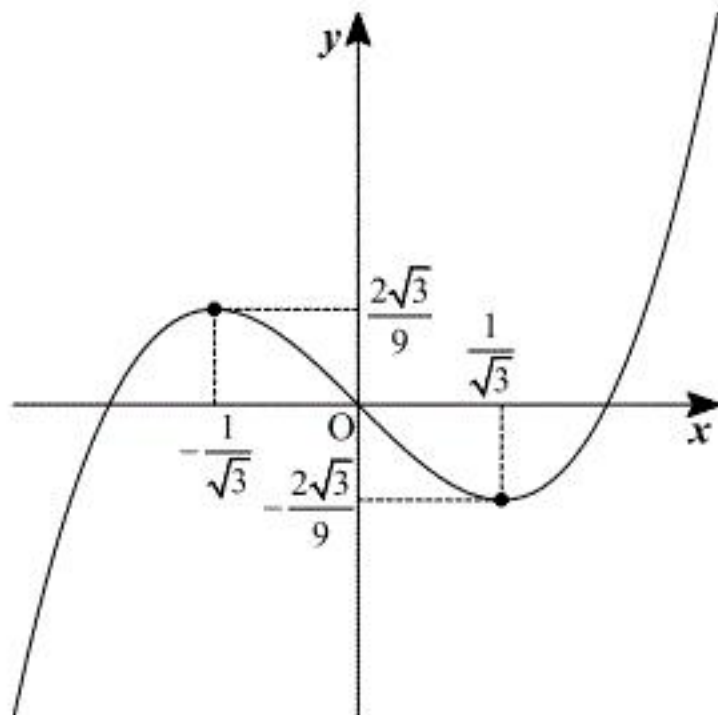
より、次の増減表を得る。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

よって $y = f(x)$ の極値は、

$$\text{極大値 } \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ 極小値 } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

である。また $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$, グラフは前図

(2)

$a > 0$ および $|f(x)| \geq 0$ より、 $y = |f(x)|$ と $y = ax$ は $x \geq 0$ の範囲にのみ交点をもつ。ここで、

$$\begin{aligned} |f(x)| &= 0 \\ \Leftrightarrow |x(x-1)(x+1)| &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 0, 1 \end{aligned}$$

である。 $0 < x < 1$ における交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x - x^3 &= ax \\ \Leftrightarrow x\{- (1-a) + x^2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, x^2 = 1-a \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \text{ のとき } x &= \sqrt{1-a} \\ a \geq 1 \text{ のとき } &\text{交点なし} \end{aligned}$$

となる。また、 $x > 1$ における交点の x 座標は、

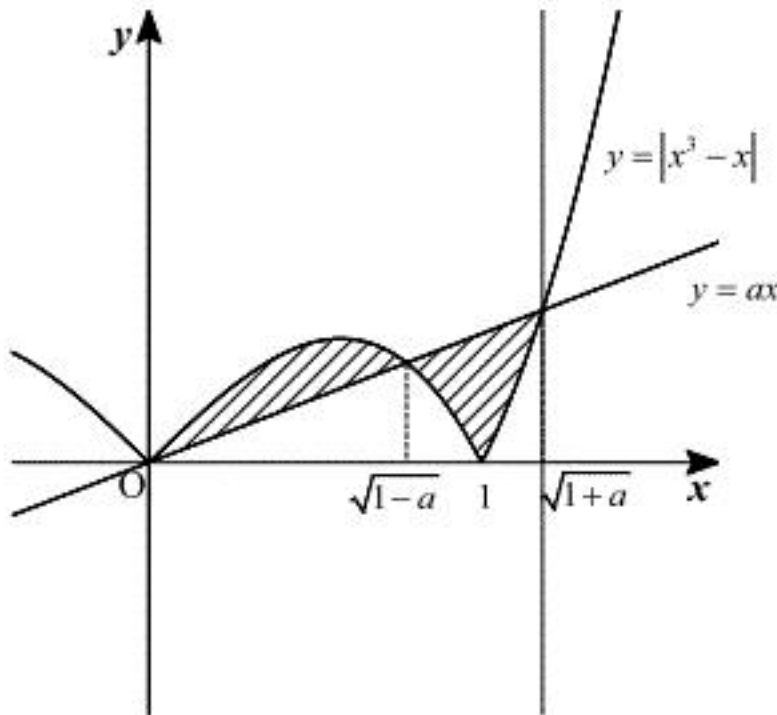
$$\begin{aligned} x^3 - x &= ax \\ \Leftrightarrow x\{(1+a) + x^2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \pm\sqrt{1+a} \end{aligned}$$

より、

$$x = \sqrt{1+a}$$

となる。以上を踏まえ、 $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求める。

[1] $0 < a < 1$ のとき

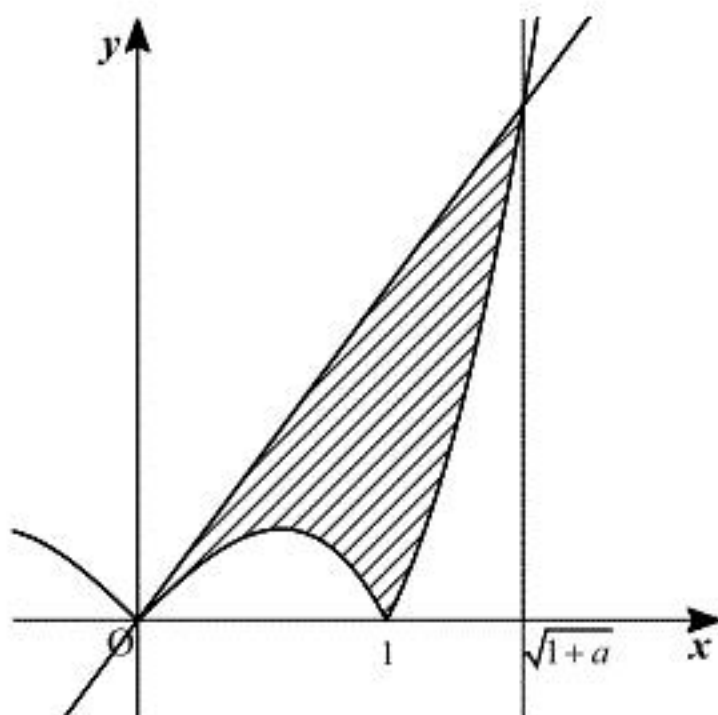


このとき、 $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分は上図のようになる。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{1-a}} \{-x^3 + (1-a)x\} dx + \int_{\sqrt{1-a}}^1 \{x^3 - (1-a)x\} dx + \int_1^{\sqrt{1+a}} \{-x^3 + (1+a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{1-a}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-a}} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1-a}{2}x^2 \right]_{\sqrt{1-a}}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{1+a}{2}x^2 \right]_1^{\sqrt{1+a}} \\ &= \frac{(1-a)^2}{4} + \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{2} \right) + \frac{(1-a)^2}{4} \right\} + \left\{ \frac{(1+a)^2}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1+a}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{(1-a)^2}{2} + \frac{(1+a)^2}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(3a^2 - 2a + 1) \end{aligned}$$

である。

[2] $a \geq 1$ のとき



このとき $y = |f(x)|$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分は上図のようになる。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{x^3 - (1-a)x\} dx + \int_1^{\sqrt{1+a}} \{-x^3 + (1+a)x\} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1-a}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{1+a}{2}x^2 \right]_1^{\sqrt{1+a}} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1-a}{2} \right) + \left\{ \frac{(1+a)^2}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1+a}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 1) \end{aligned}$$

である。

以上より、求める面積は

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(3a^2 - 2a + 1) & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 1) & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} \frac{1}{4}(3a^2 - 2a + 1) & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 1) & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

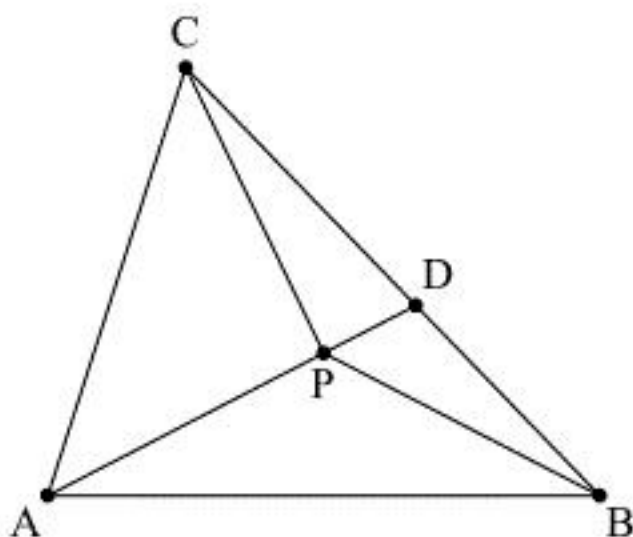
(1)

$$\begin{aligned}
& \ell \overrightarrow{AP} + m \overrightarrow{BP} + n \overrightarrow{CP} = \vec{0} \\
& \Leftrightarrow \ell \overrightarrow{AP} + m(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\
& (\ell + m + n) \overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AB} + n \overrightarrow{AC} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{m}{\ell + m + n} \overrightarrow{AB} + \frac{n}{\ell + m + n} \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{m}{\ell + m + n} \overrightarrow{AB} + \frac{n}{\ell + m + n} \overrightarrow{AC}$$

(2)



上図のように点 D を定める。このとき、点 D は線分 BC 上の点であるから、 $0 < k < 1$ なる実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AD} = k \overrightarrow{AB} + (1 - k) \overrightarrow{AC}$$

と書ける。また $\overrightarrow{AD} = t \overrightarrow{AP}$ と書けるから、 $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{\ell + m + n} \overrightarrow{AB} + \frac{n}{\ell + m + n} \overrightarrow{AC}$ より、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{mt}{\ell + m + n} \overrightarrow{AB} + \frac{nt}{\ell + m + n} \overrightarrow{AC}$$

と書ける。したがって、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ が一次独立であることより、

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} k = \frac{mt}{\ell + m + n} \\ 1 - k = \frac{nt}{\ell + m + n} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\ell + m + n}{m + n} \\ k = \frac{m}{m + n} \end{cases}
\end{aligned}$$

である。これより

$$BD : DC = n : m$$

$$AD = \frac{\ell + m + n}{m + n} AP$$

がいえる。以上より、 $\triangle ABC$ の面積が 1 のとき、

$$\triangle BCP = 1 - \frac{m + n}{\ell + m + n} = \frac{\ell}{\ell + m + n}$$

$$\triangle CAP = \frac{m + n}{\ell + m + n} \cdot \frac{m}{m + n} = \frac{m}{\ell + m + n}$$

$$\triangle ABP = \frac{m + n}{\ell + m + n} \cdot \frac{n}{m + n} = \frac{n}{\ell + m + n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \triangle BCP = \frac{\ell}{\ell + m + n}, \quad \triangle CAP = \frac{m}{\ell + m + n}, \quad \triangle ABP = \frac{n}{\ell + m + n}$$

(1)

1365 と 1560 の最大公約数は、 $1560 - 1365 = 195$ と 1365 の最大公約数と等しい。いま、

$$1365 = 195 \cdot 7$$

より、1365 は 195 で割り切れる。以上より、1365 と 1560 の最大公約数は 195 である。

(答) 195

(2)

$xyz = 1365$, $3x \leq 2y \leq z$ より、

$$x \cdot \frac{3}{2}x \cdot 3x \leq xyz = 1365$$

$$\therefore x^3 \leq 304$$

である。いま

$$6^3 = 216, 7^3 = 343$$

であるから、

$$x \leq 6$$

である。1365 が奇数であること、 x は 2 以上の整数であることより、 x として考えられるのは

$$x = 3, 5$$

のみである。

[1] $x = 3$ のとき

このとき、 $yz = 455$, $9 \leq 2y \leq z$ である。よって、

$$y \cdot 2y \leq 455$$

$$y^2 \leq 227$$

である。いま、

$$15^2 = 225, 16^2 = 256$$

であるから、 $9 \leq 2y$ と合わせて

$$5 \leq y \leq 15$$

であり、この範囲における 455 の約数は

$$5, 7, 13$$

のみである。 y がこれらの値をとるとき、 z はそれぞれ

$$91, 65, 35$$

となる。これらはすべて $2y \leq z$ を満たす。よって、 $x = 3$ のとき、

$$(x, y, z) = (3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

である。

[2] $x = 5$ のとき

このとき $yz = 273$, $15 \leq 2y \leq z$ である。よって、

$$y \cdot 2y \leq 273$$

$$y^2 \leq 136$$

である。いま、

$$11^2 = 121, 12^2 = 144$$

であるから、 $15 \leq 2y$ と合わせて、

$$8 \leq y \leq 11$$

である。この範囲に 273 の約数は存在しないので、 $x = 5$ となることはない。

以上[1][2]より、求める x, y, z の組は

$$(3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$$

である。

(答) $(3, 5, 91), (3, 7, 65), (3, 13, 35)$