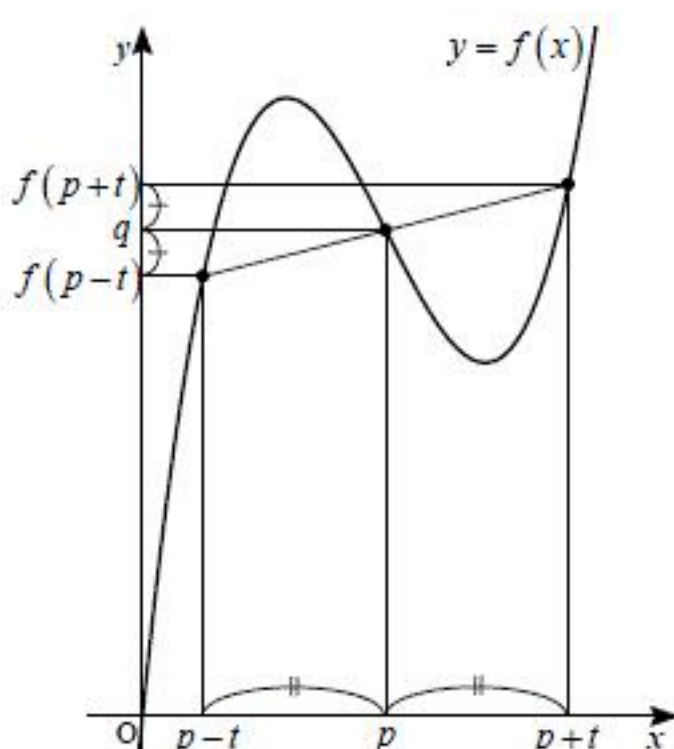


(1)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ のグラフが点 (p, q) ($p \neq 0$) に関して点対称であるとき、実数 t を用いて下図のようになる。



このとき、任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned} q &= \frac{f(p+t) + f(p-t)}{2} \\ \Leftrightarrow q &= p^3 + 3pt^2 + a(p^2 + t^2) + bp \\ \Leftrightarrow (3p+a)t^2 + p^3 + ap^2 + bp - q &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} 3p+a &= 0 & \dots\dots ① \\ p^3 + ap^2 + bp - q &= 0 & \dots\dots ② \end{aligned}$$

となる。①より

$$a = -3p$$

となり、これと②より

$$b = 2p^2 + \frac{q}{p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -3p, \quad b = 2p^2 + \frac{q}{p}$$

(2)

関数 $g(x) = |f(x)|$ のグラフが直線 $x = 2$ に関して線対称であるとき、任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned} g(2+t) &= g(2-t) \\ \Leftrightarrow |(2+t)^3 + a(2+t)^2 + b(2+t)| &= |(2-t)^3 + a(2-t)^2 + b(2-t)| \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$(2+t)^3 + a(2+t)^2 + b(2+t) = (2-t)^3 + a(2-t)^2 + b(2-t) \quad \dots\dots ③$$

または

$$(2+t)^3 + a(2+t)^2 + b(2+t) = -\{(2-t)^3 + a(2-t)^2 + b(2-t)\} \quad \dots\dots ④$$

が任意の実数 t に対して成り立つ。

[1] ③が成り立つとき

③より

$$\begin{aligned} (2+t)^3 + a(2+t)^2 + b(2+t) &= (2-t)^3 + a(2-t)^2 + b(2-t) \\ \Leftrightarrow t^3 + (4a+b+12)t &= 0 \end{aligned}$$

となるが、これは t の 3 次方程式となり、この式を満たす t の値は高々 3 つであるから不適である。

[2] ④が成り立つとき

④より

$$\begin{aligned} (2+t)^3 + a(2+t)^2 + b(2+t) &= -\{(2-t)^3 + a(2-t)^2 + b(2-t)\} \\ \Leftrightarrow (a+6)t^2 + 2(2a+b+4)t &= 0 \end{aligned}$$

となるから、これが任意の実数 t に対して成り立つとき

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+6=0 \\ 2(2a+b+4)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=8 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1]、[2]より、求める a, b の値は $(a, b) = (-6, 8)$ である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (-6, 8)$$

(1)

$\int_0^1 f(t) dt$ は定数であるから、定数 a を用いて $2a = \int_0^1 f(t) dt$ とおける。このとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$$

とかける。よって

$$\begin{aligned} 2a &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 + 2at + 1) dt \\ &= \left[t^3 + at^2 + t \right]_0^1 \\ &= 2 + a \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} 2a &= 2 + a \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

であり、関数 $f(x)$ は $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ である。

(答) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

(2)

$$\int_1^x (3t+1)g(t)dt = 4\int_k^x g(t)dt + 5x^3 - 3x^2 - 9x - 17 \quad \dots \textcircled{1}$$

の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} (3x+1)g(x) &= 4g(x) + 15x^2 - 6x - 9 \\ \Leftrightarrow (x-1)g(x) &= (x-1)(5x+3) \\ \Leftrightarrow (x-1)\{g(x) - (5x+3)\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $x \neq 1$ のとき

$$g(x) = 5x + 3$$

であり、この式は $g(1) = 8$ を満たすから、任意の実数 x に対して $g(x) = 5x + 3$ となる。このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\int_1^x (3t+1)(5t+3)dt = 4\int_k^x (5t+3)dt + 5x^3 - 3x^2 - 9x - 17 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_1^x (3t+1)(5t+3)dt &= \int_1^x (15t^2 + 14t + 3)dt \\ &= \left[5t^3 + 7t^2 + 3t \right]_1^x \\ &= 5x^3 + 7x^2 + 3x - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_k^x (5t+3)dt &= \left[\frac{5}{2}t^2 + 3t \right]_k^x \\ &= \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}k^2 - 3k \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \int_1^x (3t+1)(5t+3)dt &= 4\int_k^x (5t+3)dt + 5x^3 - 3x^2 - 9x - 17 \\ \Leftrightarrow 5x^3 + 7x^2 + 3x - 15 &= 4\left(\frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}k^2 - 3k\right) + 5x^3 - 3x^2 - 9x - 17 \\ \Leftrightarrow 10k^2 + 12k + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5k+1)(k+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{1}{5}, -1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $g(x) = 5x + 3, k = -\frac{1}{5}, -1$