

1

$0 < a, a \neq 1$ であるとき、曲線 $y = e^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

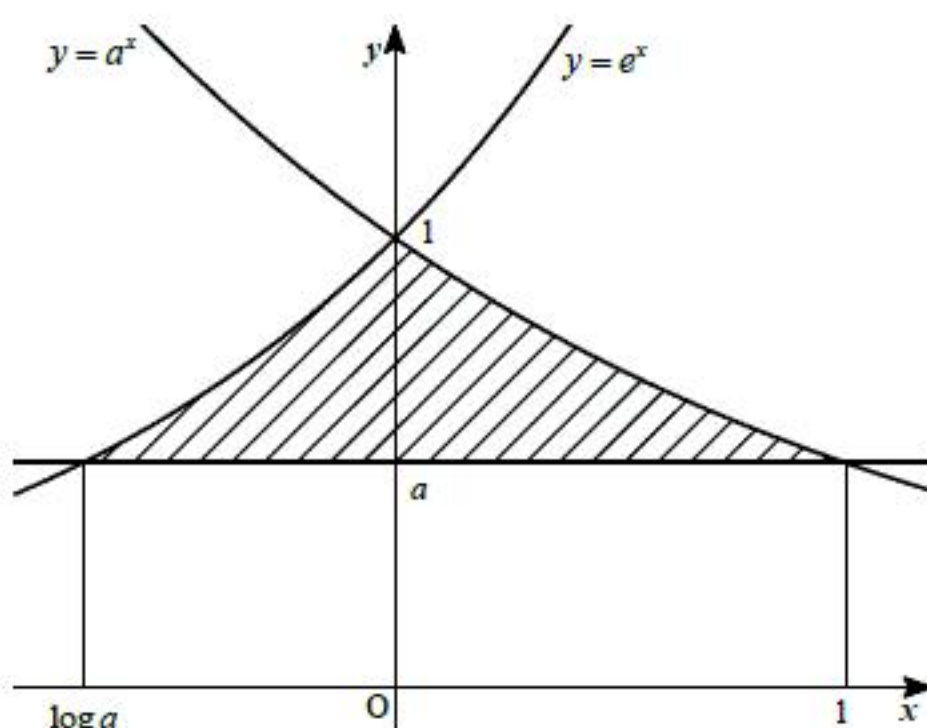
$$\begin{aligned} e^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= \log a \end{aligned}$$

であり、曲線 $y = a^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} a^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

である。

[1] $0 < a < 1$ のとき

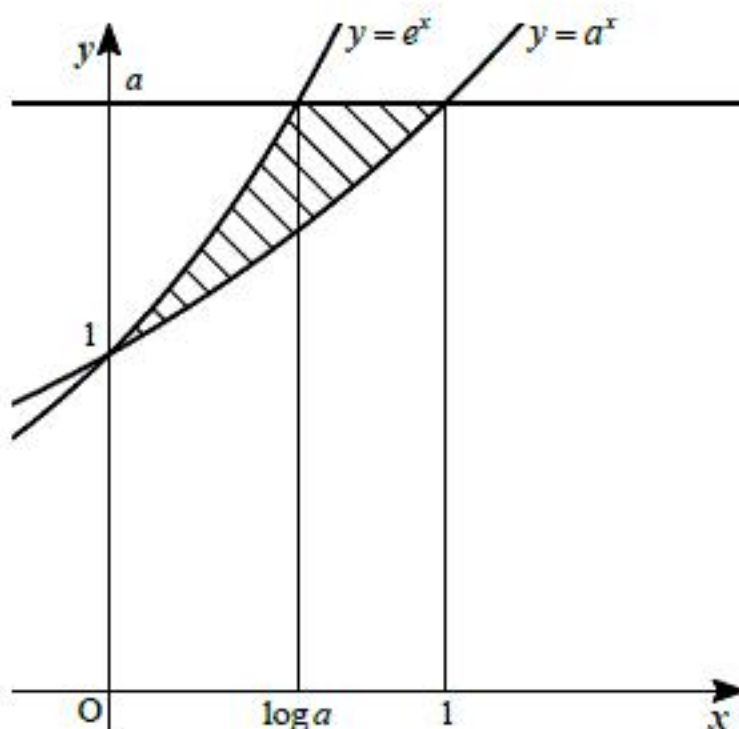


2 曲線 $y = a^x$, $y = e^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\log a}^0 (e^x - a) dx + \int_0^1 (a^x - a) dx &= \left[e^x - ax \right]_{\log a}^0 + \left[\frac{a^x}{\log a} - ax \right]_0^1 \left(\because (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= 1 - e^{\log a} + a \log a + \frac{a}{\log a} - a - \frac{1}{\log a} \\ &= \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \left(\because e^{\log a} = a \right) \end{aligned}$$

となる。

[2] $a > 1$ のとき



2 曲線 $y = a^x$, $y = e^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\log a} e^x dx + (1 - \log a) \cdot a - \int_{\log a}^1 a^x dx &= \left[e^x \right]_0^{\log a} + a(1 - \log a) - \left[\frac{a^x}{\log a} \right]_{\log a}^1 \left(\because (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= e^{\log a} - 1 + a - a \log a - \frac{a}{\log a} + \frac{1}{\log a} \\ &= \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \left(\because e^{\log a} = a \right) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より, 求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \quad (0 < a < 1) \\ \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \quad (1 < a) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \quad (0 < a < 1), \quad \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \quad (1 < a)$$

(1)

$n=1$ のとき、高さが1となるのはAを1個積み上げる場合のみであるから

$$a_1 = 1$$

である。 $n=2$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A, B$$

と積み上げる場合があるから

$$a_2 = 2$$

である。 $n=3$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow A$$

と積み上げる場合があるから

$$a_3 = 3$$

である。

$$(\text{答}) \ a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

(2)

Bをちょうど k 個使って高さ n の塔を作るとき、Aは $n-2k$ 個必要であるから、積み木の数は全部で $(n-2k)+k=n-k$ 個ある。このときの積み上げ方の場合の数は、A、Bの並べ方を考えて

$${}_{n-k}C_k = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$$

となる。

$$(\text{答}) \ \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$$

(3)

積み木を積み上げて高さ11の塔を作るとき、使用するBの積み木の個数は0, 1, 2, ..., 5個のいずれかである。したがって、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{k=0}^5 \frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} \\ &= \frac{11!}{0!11!} + \frac{10!}{1!9!} + \frac{9!}{2!7!} + \frac{8!}{3!5!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{5!1!} \\ &= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 \\ &= 144 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a_{11} = 144$$

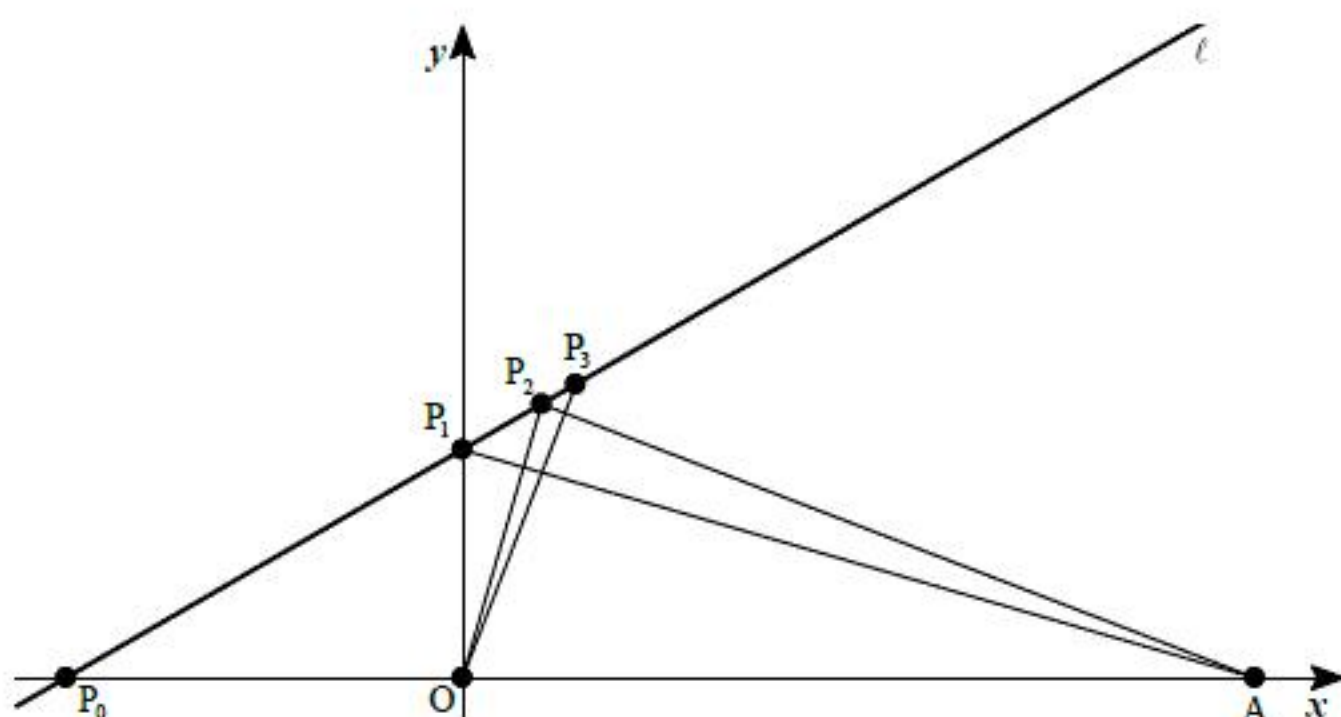
(4)

Aが9個まで、Bが4個まで使えるとき、高さ11の塔を作る場合の数は a_{11} からAを11個使う場合とAを1個、Bが5個使う場合の数を除いた場合の数であるから

$$144 - 1 - 6 = 137$$

となる。

$$(\text{答}) \ 137 \text{通り}$$



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP_0} + t_1 \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_1 (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_1 - 1, \sqrt{3}t_1)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{AP_0}$, $\overrightarrow{AP_0} = (-3, 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{AP_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_1 - 1) \cdot (-3) + \sqrt{3}t_1 \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow t_1 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t_1 = \frac{1}{3}$$

(2)

$n=1, 2, 3, \dots$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} &= \overrightarrow{OP_0} + t_n \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_n (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_n - 1, \sqrt{3}t_n)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_{n-1}} &= \overrightarrow{OP_{n-1}} - \overrightarrow{OA} \\ &= (3t_{n-1} - 3, \sqrt{3}t_{n-1})\end{aligned}$$

である。 $n=1, 2, 3, \dots$ において $\overrightarrow{OP_n} \perp \overrightarrow{AP_{n-1}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} \cdot \overrightarrow{AP_{n-1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_n - 1) \cdot (3t_{n-1} - 3) + \sqrt{3}t_n \cdot \sqrt{3}t_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 12t_n t_{n-1} - 9t_n - 3t_{n-1} + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)の結果より

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{7}$$

であるから

$$t_n = \frac{n}{2n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

と推測される。②が正しいことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$t_1 = \frac{1}{3}$$

であるから、②は正しい。

[2] $n=k$ のとき

②が正しい、つまり

$$t_k = \frac{k}{2k+1}$$

であると仮定する。このとき、①より

$$\begin{aligned}4t_{k+1}t_k - 3t_{k+1} - t_k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t_{k+1} \cdot \frac{k}{2k+1} - 3t_{k+1} - \frac{k}{2k+1} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2k+3)t_{k+1} &= k+1 \\ \Leftrightarrow t_{k+1} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \quad (\because 2k+3 \neq 0)\end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも②は正しい。

以上, [1], [2]より、すべての自然数 n について②は正しいことが示された。よって

$$t_n = \frac{n}{2n+1}$$

であり、(2)の考察より

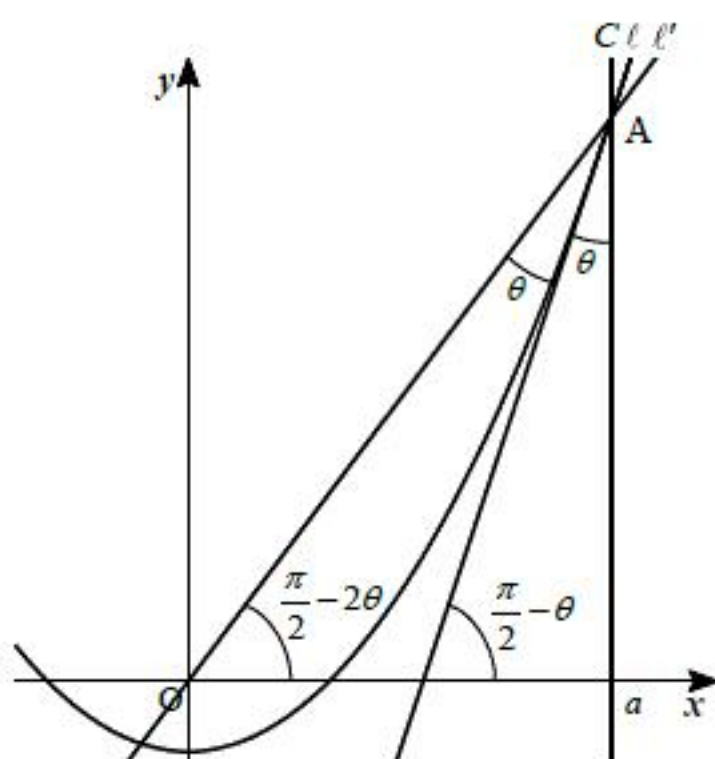
$$\overrightarrow{OP_n} = \left(\frac{3n}{2n+1} - 1, \frac{\sqrt{3}n}{2n+1} \right)$$

となるから、点 P_n の x 座標が $\frac{33}{67}$ であるとき

$$\begin{aligned}\frac{3n}{2n+1} - 1 &= \frac{33}{67} \\ \Leftrightarrow \frac{3n}{2n+1} &= \frac{100}{67} \\ \Leftrightarrow 201n &= 200n + 100 \\ \Leftrightarrow n &= 100\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n = 100$$



(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線 l の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = a(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l: y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

(2)

直線 $x = a$ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}$ であり、直線 $x = a$ と l のなす角が $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ で

あるとき、 l と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。このとき、 l の傾きは $f'(a)$ であるか

ら

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = a$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{a} \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{1}{a}$$

(3)

求める直線を l' とすると、 l' と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ であり、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$

であるから、 l' の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a^2 - 1}{2a} \end{aligned}$$

となる。よって、求める直線 l' の方程式は

$$y = \frac{a^2 - 1}{2a}(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

5

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

であるから、 A は原点中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転する変換と原点からの距離を 2 倍に拡大する変換の合成変換を表す行列である。よって

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} & -\sin \frac{n\pi}{6} \\ \sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$$

となるから

$$A^{12} = 2^{12} \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} \\ = 2^{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{pmatrix}$$

である。

(答) $A^{12} = \begin{pmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{pmatrix}$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

であるから、 B は原点中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転する変換と原点からの距離を 2 倍に拡大する変換の合成変換を表す行列である。よって

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{2} & -\sin \frac{n\pi}{2} \\ \sin \frac{n\pi}{2} & \cos \frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}$$

である。よって

$$A^k B^l = 2^k \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{6} & -\sin \frac{k\pi}{6} \\ \sin \frac{k\pi}{6} & \cos \frac{k\pi}{6} \end{pmatrix} \cdot 2^l \begin{pmatrix} \cos \frac{l\pi}{6} & -\sin \frac{l\pi}{6} \\ \sin \frac{l\pi}{6} & \cos \frac{l\pi}{6} \end{pmatrix} \\ = 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi & -\sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi & \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \end{pmatrix}$$

となるから

$$A^k B^l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{9-m} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi & -\sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi & \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{9-m} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{9-m} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{k+l} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 2^{9-m} \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 0 \quad (\because 2^{k+l} \neq 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 2^{9-m-k-l} \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 0 \end{cases}$$

である。

$$\sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 0$$

のとき、整数 p を用いて

$$\left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = p\pi$$

と表すことができ、このとき

$$\cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = \pm 1$$

となるが

$$\cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 2^{9-m-k-l} > 0$$

であることから

$$\cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{2} \right) \pi = 1$$

となり、 p は偶数となる。よって、整数 n を用いて $p = 2n$ とかけ

$$\begin{cases} 2^{9-m-k-l} = 1 \\ \frac{k}{6} + \frac{l}{2} = 2n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 9-m-k-l = 0 \\ k+3l = 12n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9-k-l \\ k+3l = 12n \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 k, l, m が自然数であるとき

$$m \geq 1, 9-k-l \leq 7$$

となるから、上の式を満たし得る m の値の範囲は

$$1 \leq m \leq 7$$

である。このそれぞれの値に対して①を満たすような自然数 (k, l) の組は

$m=1$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は $(6, 2)$ が存在する

$m=2$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は存在しない

$m=3$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は $(3, 3)$ が存在する

$m=4$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は存在しない

$m=5$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は存在しない

$m=6$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は存在しない

$m=7$ のとき、①を満たす自然数 (k, l) の組は存在しない

となるから、求める自然数の組 (k, l, m) は

$$(k, l, m) = (6, 2, 1), (3, 3, 3)$$

である。

(答) $(k, l, m) = (6, 2, 1), (3, 3, 3)$