

(1)

$$4^x = 2^{y+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{xy} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

について、 $x, y > 0$ のとき真数条件は満たされる。ここで、①より

$$\begin{aligned} 4^x &= 2^{y+1} \\ \Leftrightarrow 2^{2x} &= 2^{y+1} \\ \Leftrightarrow 2x &= y+1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x-1 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、②より

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{xy} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{xy} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow xy &= 3 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

であるから、①、②を同時に満たす x, y は、③、④を同時に満たす x, y に等しく

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2x-1 \\ xy = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = 2x-1 \\ x(2x-1) = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = 2x-1 \\ (2x-3)(x+1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) (\because x, y > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

(1)

$n=1$ のとき、高さが1となるのはAを1個積み上げる場合のみであるから

$$a_1 = 1$$

である。 $n=2$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A, B$$

と積み上げる場合があるから

$$a_2 = 2$$

である。 $n=3$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow A$$

と積み上げる場合があるから

$$a_3 = 3$$

である。

$$(\text{答}) \ a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

(2)

Bをちょうど k 個使って高さ n の塔を作るとき、Aは $n-2k$ 個必要であるから、積み木の本数は全部で $(n-2k)+k=n-k$ 個ある。このときの積み上げ方の場合の数は、A、Bの並べ方を考えて

$${}_{n-k}C_k = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$$

となる。

$$(\text{答}) \ \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$$

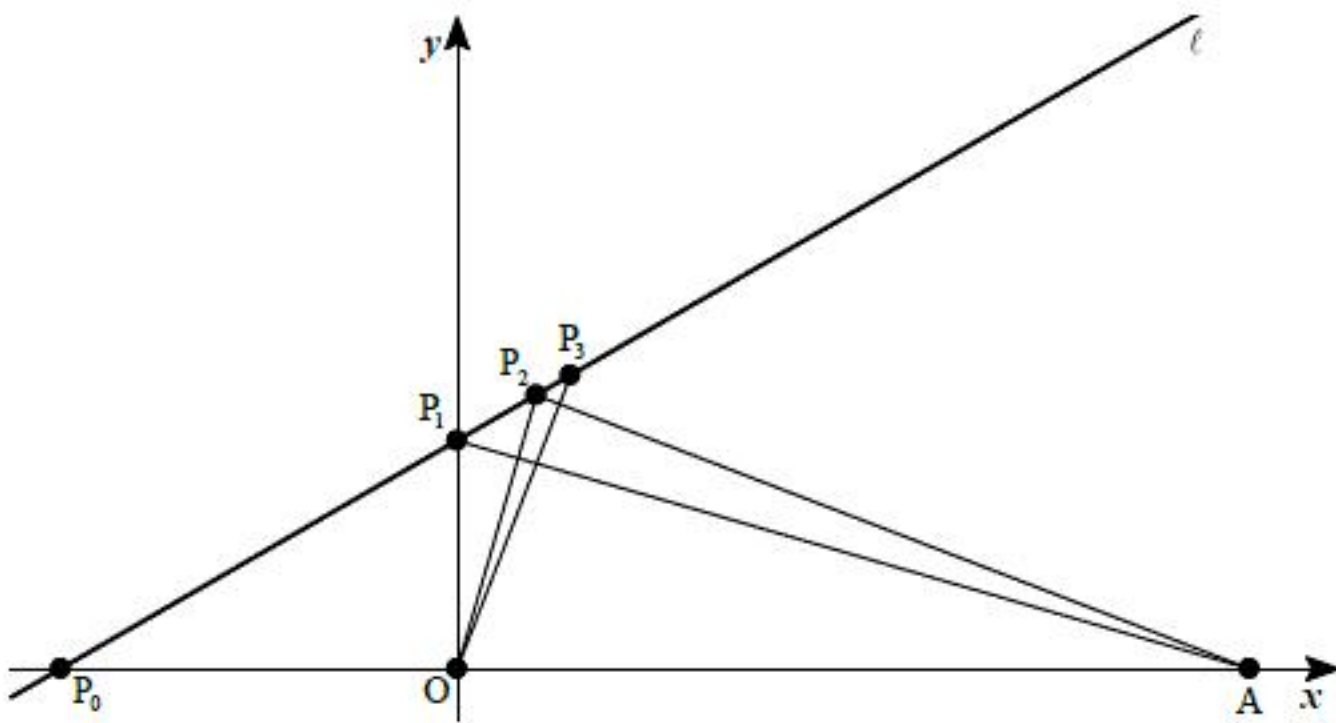
(3)

積み木を積み上げて高さ11の塔を作るとき、使用するBの積み木の個数は0, 1, 2, ..., 5個のいずれかである。したがって、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{k=0}^5 \frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} \\ &= \frac{11!}{0!11!} + \frac{10!}{1!9!} + \frac{9!}{2!7!} + \frac{8!}{3!5!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{5!1!} \\ &= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 \\ &= 144 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a_{11} = 144$$



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP_0} + t_1 \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_1 (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_1 - 1, \sqrt{3}t_1)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{AP_0}$, $\overrightarrow{AP_0} = (-3, 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{AP_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_1 - 1) \cdot (-3) + \sqrt{3}t_1 \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow t_1 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t_1 = \frac{1}{3}$$

(2)

$n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} &= \overrightarrow{OP_0} + t_n \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_n (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_n - 1, \sqrt{3}t_n)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_{n-1}} &= \overrightarrow{OP_{n-1}} - \overrightarrow{OA} \\ &= (3t_{n-1} - 3, \sqrt{3}t_{n-1})\end{aligned}$$

である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ において $\overrightarrow{OP_n} \perp \overrightarrow{AP_{n-1}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} \cdot \overrightarrow{AP_{n-1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_n - 1) \cdot (3t_{n-1} - 3) + \sqrt{3}t_n \cdot \sqrt{3}t_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 12t_n t_{n-1} - 9t_n - 3t_{n-1} + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 &= 0\end{aligned}$$

... ①

となる。

$$(\text{答}) \quad 4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

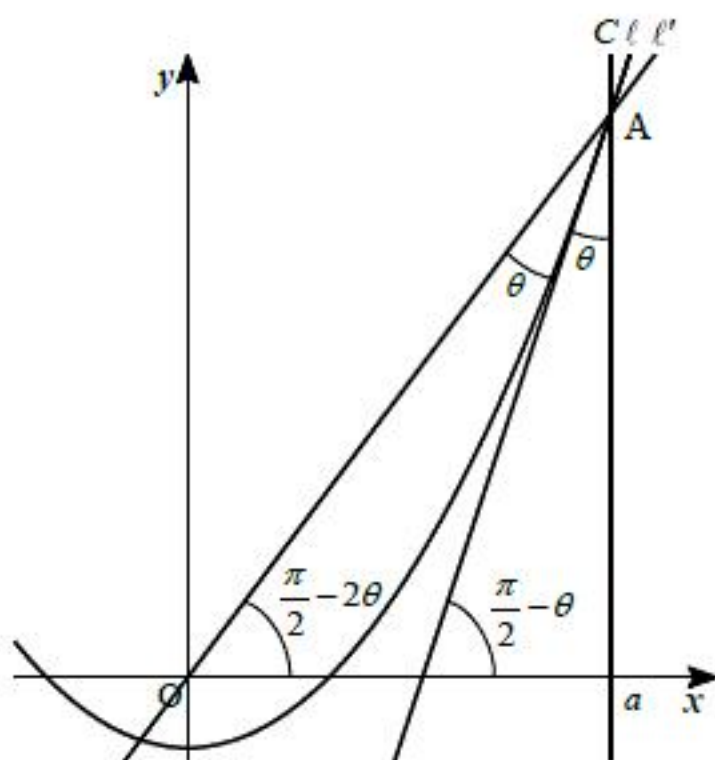
(3)

式①に $t_1 = \frac{1}{3}$ から順次代入して

$$t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{7}, t_4 = \frac{4}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{7}, t_4 = \frac{4}{9}$$



(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = a(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

(2)

直線 $x = a$ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}$ であり、直線 $x = a$ と ℓ のなす角が $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ で

あるとき、 ℓ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。このとき、 ℓ の傾きは $f'(a)$ であるか

ら

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = a$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{a} \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{1}{a}$$

(3)

求める直線を ℓ' とすると、 ℓ' と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ であり、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$

であるから、 ℓ' の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a^2 - 1}{2a} \end{aligned}$$

となる。よって、求める直線 ℓ' の方程式は

$$y = \frac{a^2 - 1}{2a}(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

(1)

$f(x) = x^2 - 2ax + 4a$, $g(x) = -x^2 + 6x - 2a$ について, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + 4a = -x^2 + 6x - 2a$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+3)x + 3a = 0$$

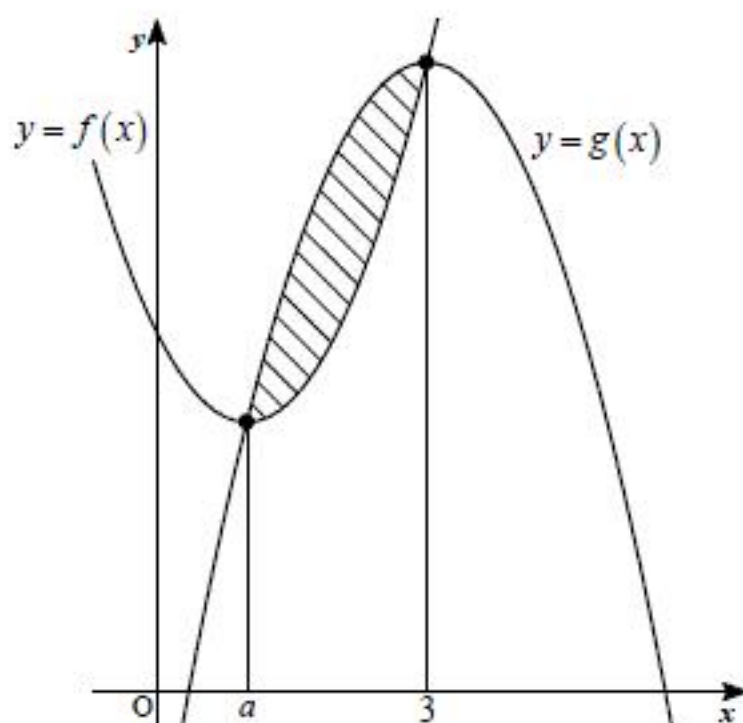
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3, a$$

となり, $a \neq 3$ であるから, 求める交点の x 座標は $3, a$ となる。

(答) $3, a$

(2)



$a < 3$ であるから

$$x < a, 3 < x \text{ のとき } f(x) > g(x)$$

$$a \leq x \leq 3 \text{ のとき } f(x) \leq g(x)$$

となり, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようなになる。この図形の面積を S とおくと

$$S = \int_a^3 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= -2 \int_a^3 (x-3)(x-a) dx$$

$$= \frac{2}{6} (3-a)^3$$

$$= \frac{1}{3} (3-a)^3$$

となり, この値が 9 となるとき

$$S = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} (3-a)^3 = 9$$

$$\Leftrightarrow (3-a)^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow 3-a = 3$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

である。

(答) $a = 0$