

1

$0 < a < 2, a \neq 1$ であるとき、曲線 $y = a^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

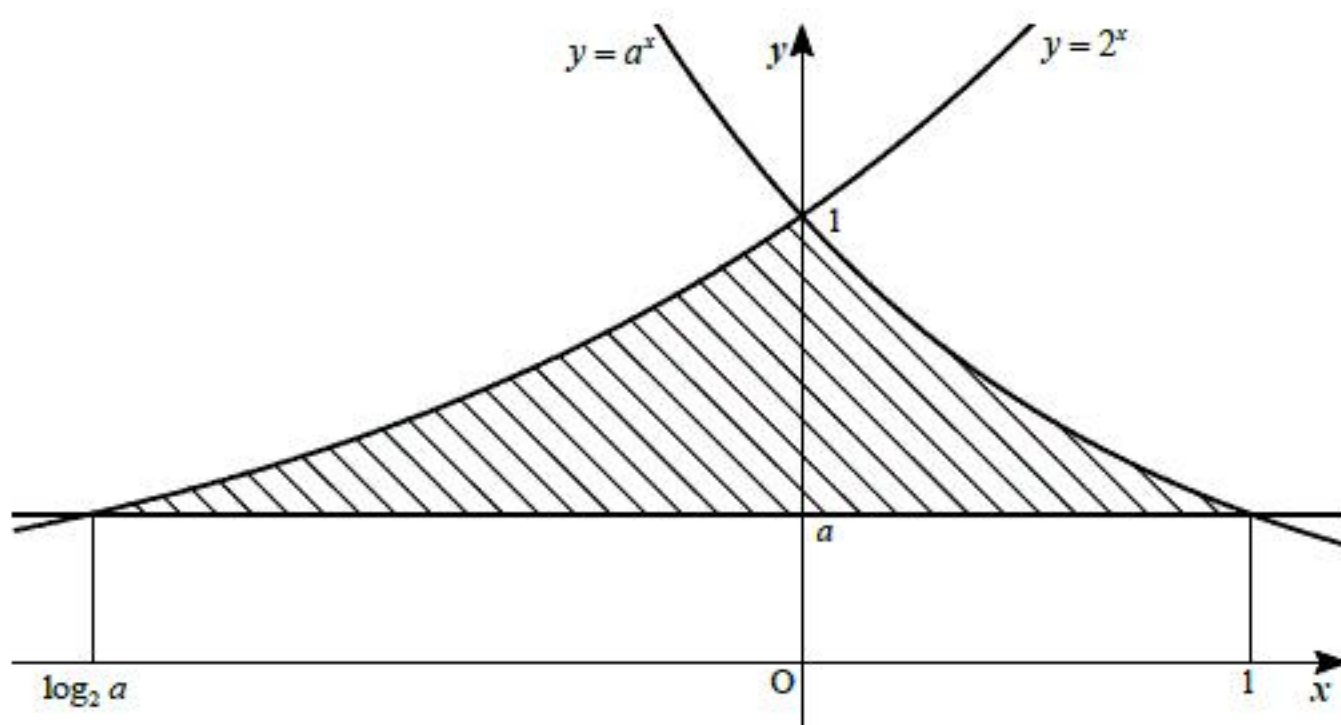
$$\begin{aligned} a^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

であり、曲線 $y = 2^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= \log_2 a \end{aligned}$$

である。

[1] $0 < a < 1$ のとき

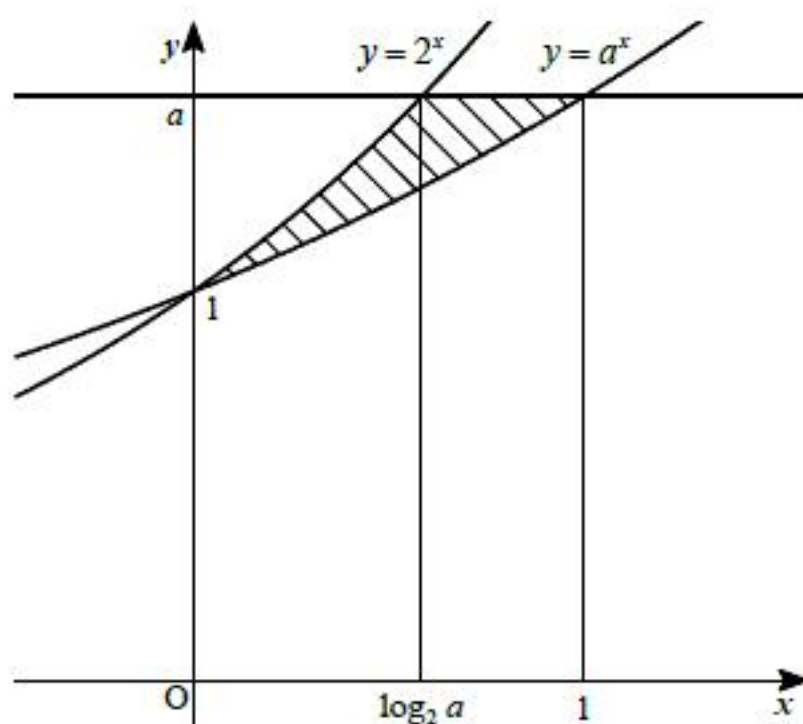


2 曲線 $y = a^x, y = 2^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようにになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} & \int_{\log_2 a}^0 2^x dx + \int_0^1 a^x dx - a(1 - \log_2 a) \\ &= \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{\log_2 a}^0 + \left[\frac{a^x}{\log a} \right]_0^1 - a(1 - \log_2 a) \left(\because (2^x)' = 2^x \log 2, (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= \frac{1}{\log 2} - \frac{2^{\log_2 a}}{\log 2} + \frac{a}{\log a} - \frac{1}{\log a} - a(1 - \log_2 a) \\ &= (1 - a) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) - a(1 - \log_2 a) \end{aligned}$$

となる。

[2] $a > 1$ のとき



2 曲線 $y = a^x, y = 2^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようにになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\log_2 a} 2^x dx + (1 - \log_2 a) \cdot a - \int_0^1 a^x dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_0^{\log_2 a} + a(1 - \log_2 a) - \left[\frac{a^x}{\log a} \right]_0^1 \left(\because (2^x)' = 2^x \log 2, (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= \frac{2^{\log_2 a}}{\log 2} - \frac{1}{\log 2} + a(1 - \log_2 a) - \frac{a}{\log a} + \frac{1}{\log a} \\ &= (a - 1) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) + a(1 - \log_2 a) \left(\because 2^{\log_2 a} = a \right) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より、求める面積は

$$\begin{aligned} & (1 - a) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) - a(1 - \log_2 a) \quad (0 < a < 1) \\ & (a - 1) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) + a(1 - \log_2 a) \quad (1 < a) \end{aligned}$$

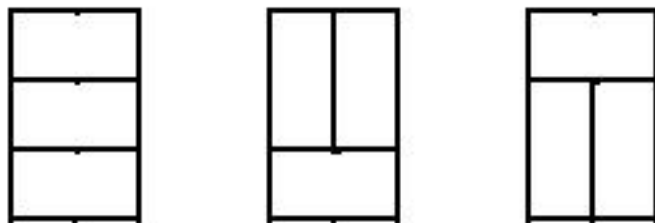
である。

$$(答) \quad (1 - a) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) - a(1 - \log_2 a) \quad (0 < a < 1), \quad (a - 1) \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log a} \right) + a(1 - \log_2 a) \quad (1 < a)$$

2

(1)

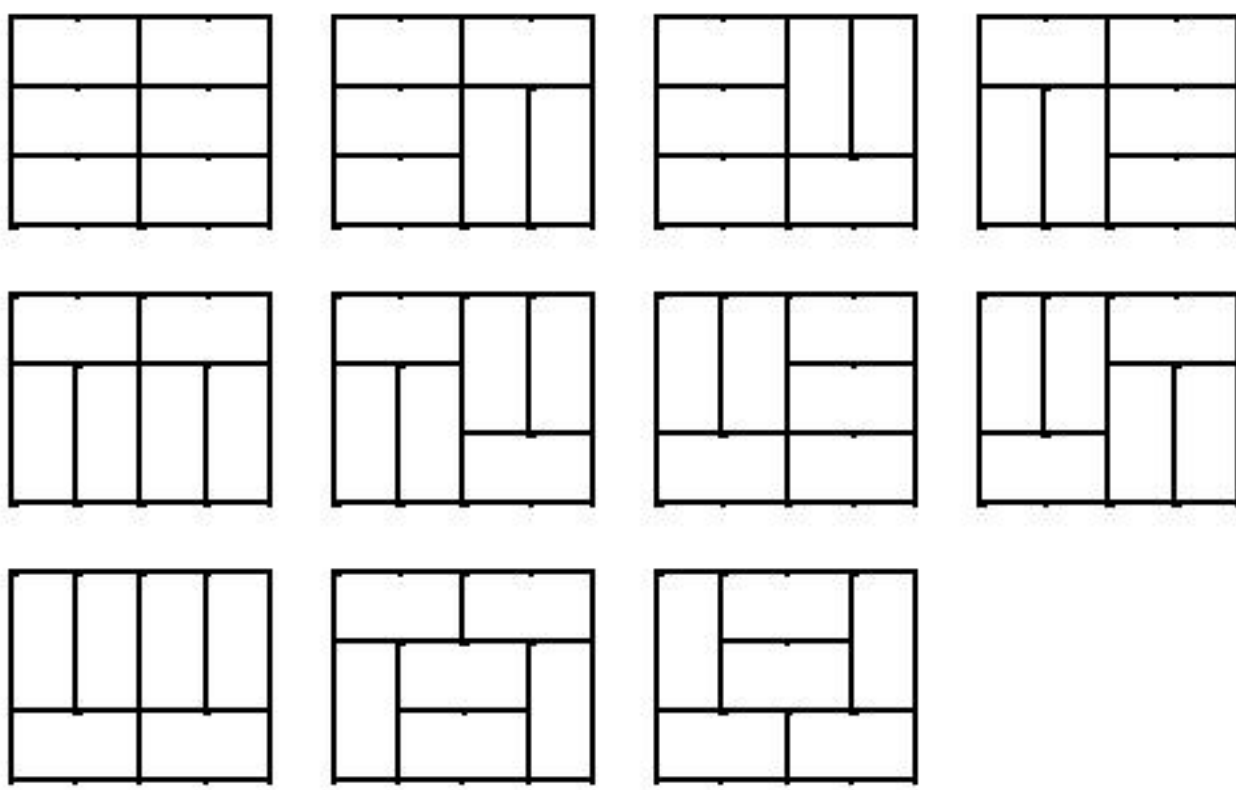
$n=1$ のとき、縦が3、横が2 の長方形の盤上全体を敷きつめるとき、その敷きつめ方は下図のようになる。



よって、このときのタイルの敷きつめ方の場合の数 a_1 は

$$a_1 = 3$$

となる。 $n=2$ のとき、縦が3、横が4 の長方形の盤上全体を敷きつめるとき、その敷きつめ方は下図のようになる。



よって、このときのタイルの敷きつめ方の場合の数 a_2 は

$$a_2 = 11$$

となる。

(答) $a_1 = 3, a_2 = 11$

(2)

(1)の結果より

$$x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = 8$$

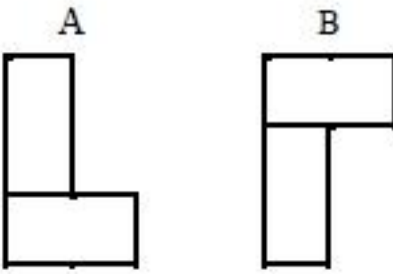
である。縦が3、横が $2n$ の長方形の盤上全体を敷きつめる方法は、左端に3つのタイルが接している敷きつめ方か、それ以外の敷きつめ方のみが考えられ、これらは互いに排反であるから、それらの場合の数を考えて

$$a_n = x_n + y_n$$

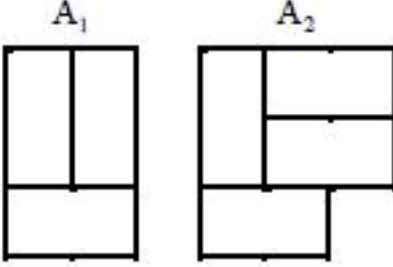
である。次に、縦が3、横が $2(n+1)$ の長方形の盤上全体を敷きつめるとき、左端に3つのタイルが接している敷きつめ方 x_{n+1} は、左端の3つのタイルの敷きつめ方が1通り、残りの縦が3、横が $2n$ の長方形の盤上全体を敷きつめる場合の数が a_n 通りであるから

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n \\ &= x_n + y_n \end{aligned}$$

である。また、縦が3、横が $2(n+1)$ の長方形の盤上全体を敷きつめるとき、左端に3つのタイルが接している敷きつめ方以外について、左端は下図のA、Bいずれかの敷き詰め方となる。



さらに、Aの敷きつめ方に関して、上図の右上部分へのタイルの敷きつめ方は下図の2通りがある。



A_1 のようにタイルを敷き詰めるとき、残りの縦が3、横が $2n$ の長方形の盤上全体を敷きつめる場合の数が a_n 通りある。また、 A_2 のようにタイルを敷きつめた場合、上図の右下部分へのタイルの敷きつめ方は1通りに決まり、このときの残りの部分へのタイルの敷きつめ方は、縦が3、横が $2n$ の長方形の盤上全体を敷きつめる場合のうちで左端をAのように敷きつめた場合の敷きつめ方に等しいから $\frac{y_n}{2}$ 通りになる。よって、縦が3、横が $2(n+1)$ の長方形の盤上全体を敷きつめるとき、左端をAのように敷きつめた場合の敷きつめ方の場合の数は

$$a_n + \frac{y_n}{2} \text{ 通り}$$

あり、これが $\frac{y_{n+1}}{2}$ と等しいから

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 2 \left(a_n + \frac{y_n}{2} \right) \\ &= 2 \left(x_n + \frac{3}{2} y_n \right) \\ &= 2x_n + 3y_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = x_n + y_n, x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= x_{n+2} + y_{n+2} \\ &= (x_{n+1} + y_{n+1}) + (2x_{n+1} + 3y_{n+1}) \\ &= 3x_{n+1} + 4y_{n+1} \\ &= 4(x_{n+1} + y_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= 4(x_{n+1} + y_{n+1}) - (x_n + y_n) \\ &= 4a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

となるから、 $a_1 = 3, a_2 = 11$ のとき

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \cdot 11 - 3 \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 4 \cdot 41 - 11 \\ &= 153 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, a_4 = 153$

3

(1)

$$\overline{AB} = (7-a, -a-1), \overline{AC} = (-a, -a)$$

であるから, $AB \perp AC$ のとき

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7-a) \cdot (-a) + (-a-1) \cdot (-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2a-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \quad (\because a \neq 0)$$

となる。

(答) $a = 3$

(2)

(1)の結果より, $A(5, 4)$ であり, $\overline{AB} = (4, -4)$, $\overline{AC} = (-3, -3)$ となる。ここで, $\triangle ABC$, $\triangle P_n Q_n R_n$, $\triangle AR_n P_n$, $\triangle BP_n Q_n$, $\triangle CQ_n R_n$ の面積をそれぞれ S, S_n, S', S'', S''' とおくと

$$S_n = S - S' - S'' - S'''$$

である。また, $AB \perp AC$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

となる。さらに, P_n, Q_n, R_n の内分比より

$$\begin{aligned} S' &= \frac{n}{n+(n+4)} \cdot \frac{1}{n+1} S \\ &= \frac{n}{2(n+1)(n+2)} S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{n+4}{n+(n+4)} \cdot \frac{3}{3+n} S \\ &= \frac{3(n+4)}{2(n+2)(n+3)} S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''' &= \frac{n}{3+n} \cdot \frac{n}{n+1} S \\ &= \frac{n^2}{(n+1)(n+3)} S \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} S_n &= S - S' - S'' - S''' \\ &= S - \frac{n}{2(n+1)(n+2)} S - \frac{3(n+4)}{2(n+2)(n+3)} S - \frac{n^2}{(n+1)(n+3)} S \\ &= \frac{2(n+1)(n+2)(n+3) - n(n+3) - 3(n+1)(n+4) - 2n^2(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} S \\ &= \frac{4n(n+1)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} S \\ &= \frac{2n}{(n+2)(n+3)} S \\ &= \frac{24n}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \frac{24n}{(n+2)(n+3)}$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &= \frac{24}{(n+2)(n+3)} \\ &= 24 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

であるから

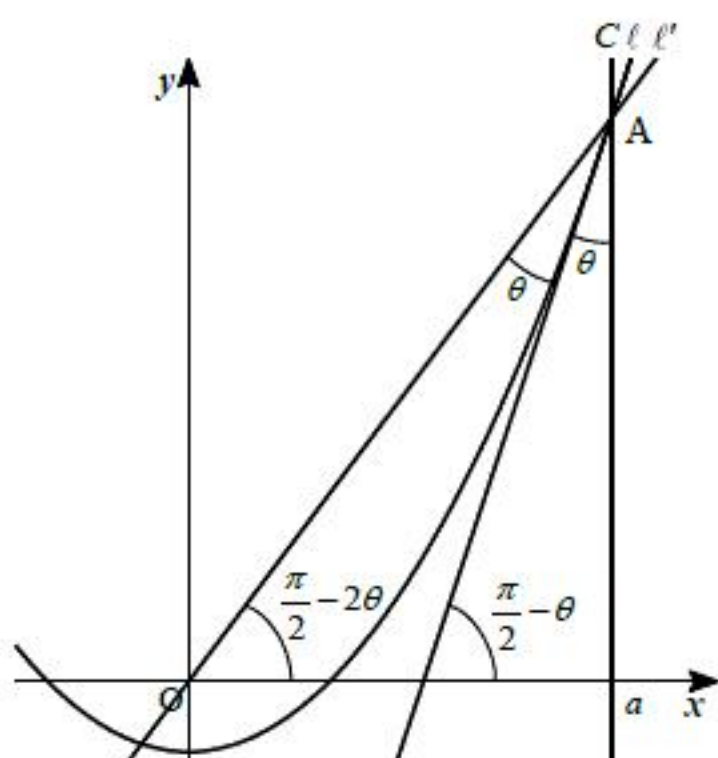
$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{n=1}^m \frac{S_n}{n} \\ &= 24 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) \right\} \\ &= 24 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+3} \right) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} T_m &= 24 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = 8$



(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = a(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

(2)

直線 $x = a$ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}$ であり、直線 $x = a$ と ℓ のなす角が $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ で

あるとき、 ℓ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。このとき、 ℓ の傾きは $f'(a)$ であるから

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = a$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{a} \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{1}{a}$$

(3)

求める直線を ℓ' とすると、 ℓ' と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ であり、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$

であるから、 ℓ' の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a^2 - 1}{2a} \end{aligned}$$

となる。よって、求める直線 ℓ' の方程式は

$$y = \frac{a^2 - 1}{2a}(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

5

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

であるから、 A は原点中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転する変換と原点からの距離を 2 倍に拡大する変換の合成

変換を表す行列であり、 B は原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転する変換と原点からの距離を 2 倍に拡大する

変換の合成変換を表す行列である。これより

$$A^k = 2^k \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{6} & -\sin \frac{k\pi}{6} \\ \sin \frac{k\pi}{6} & \cos \frac{k\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$B^l = 2^l \begin{pmatrix} \cos \frac{l\pi}{4} & -\sin \frac{l\pi}{4} \\ \sin \frac{l\pi}{4} & \cos \frac{l\pi}{4} \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} A^k B^l &= 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{6} & -\sin \frac{k\pi}{6} \\ \sin \frac{k\pi}{6} & \cos \frac{k\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{l\pi}{4} & -\sin \frac{l\pi}{4} \\ \sin \frac{l\pi}{4} & \cos \frac{l\pi}{4} \end{pmatrix} \\ &= 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{4} \right) \pi & -\sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{4} \right) \pi \\ \sin \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{4} \right) \pi & \cos \left(\frac{k}{6} + \frac{l}{4} \right) \pi \end{pmatrix} \\ &= 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi & -\sin \frac{2k+3l}{12} \pi \\ \sin \frac{2k+3l}{12} \pi & \cos \frac{2k+3l}{12} \pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (1 \ 0) A^k B^l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2^{k+l} (1 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi & -\sin \frac{2k+3l}{12} \pi \\ \sin \frac{2k+3l}{12} \pi & \cos \frac{2k+3l}{12} \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2^{k+l} \begin{pmatrix} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi & -\sin \frac{2k+3l}{12} \pi \\ \sin \frac{2k+3l}{12} \pi & \cos \frac{2k+3l}{12} \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2^{k+l} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi \end{aligned}$$

であるから、 $(1 \ 0) A^k B^l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{9-m}$ であるとき

$$\begin{aligned} 2^{k+l} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi &= 2^{9-m} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2k+3l}{12} \pi &= 2^{9-m-k-l} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $2^{9-m-k-l} > 0$ であるから $\cos \frac{2k+3l}{12} \pi > 0$ であり、 $\textcircled{1}$ を満たし得るのは

$$\cos \frac{2k+3l}{12} \pi = 1 \text{ または } \cos \frac{2k+3l}{12} \pi = \frac{1}{2}$$

のときとなる。

[1] $\cos \frac{2k+3l}{12} \pi = \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{2k+3l}{12} \pi &= \frac{\pi}{3} + 2n\pi \text{ または } \frac{2k+3l}{12} \pi = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \ (n \text{ は自然数}) \\ \Leftrightarrow 2k+3l &= 4+24n \text{ または } 2k+3l = 20+24n \ (n \text{ は自然数}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} 2^{9-m-k-l} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 9-m-k-l &= -1 \\ \Leftrightarrow k+l &= 10-m \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 k, l, m は自然数であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$2 \leq k+l \leq 9 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。よって、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{4}$ を満たす自然数の組 (k, l) は

$$(k, l) = (1, 6), (4, 4), (7, 2)$$

であり、 $\textcircled{3}$ より求める自然数の組 (k, l, m) は

$$(k, l, m) = (1, 6, 3), (4, 4, 2), (7, 2, 1)$$

となる。

[2] $\cos \frac{2k+3l}{12} \pi = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \cos \frac{2k+3l}{12} \pi &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2k+3l}{12} \pi &= 2n\pi \ (n \text{ は自然数}) \\ \Leftrightarrow 2k+3l &= 24n \ (n \text{ は自然数}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} 2^{9-m-k-l} &= 1 \\ \Leftrightarrow 9-m-k-l &= 0 \\ \Leftrightarrow k+l &= 9-m \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。 k, l, m は自然数であるから、 $\textcircled{6}$ より

$$2 \leq k+l \leq 8 \quad \dots \textcircled{7}$$

である。しかし、 $\textcircled{5}$ 、 $\textcircled{7}$ を満たす自然数の組 (k, l) は存在せず、不適である。

以上、[1]、[2] より、求める自然数 (k, l, m) の組は

$$(k, l, m) = (1, 6, 3), (4, 4, 2), (7, 2, 1)$$

である。

(答) $(k, l, m) = (1, 6, 3), (4, 4, 2), (7, 2, 1)$