

1

$0 < a, a \neq 1$ であるとき、曲線 $y = e^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

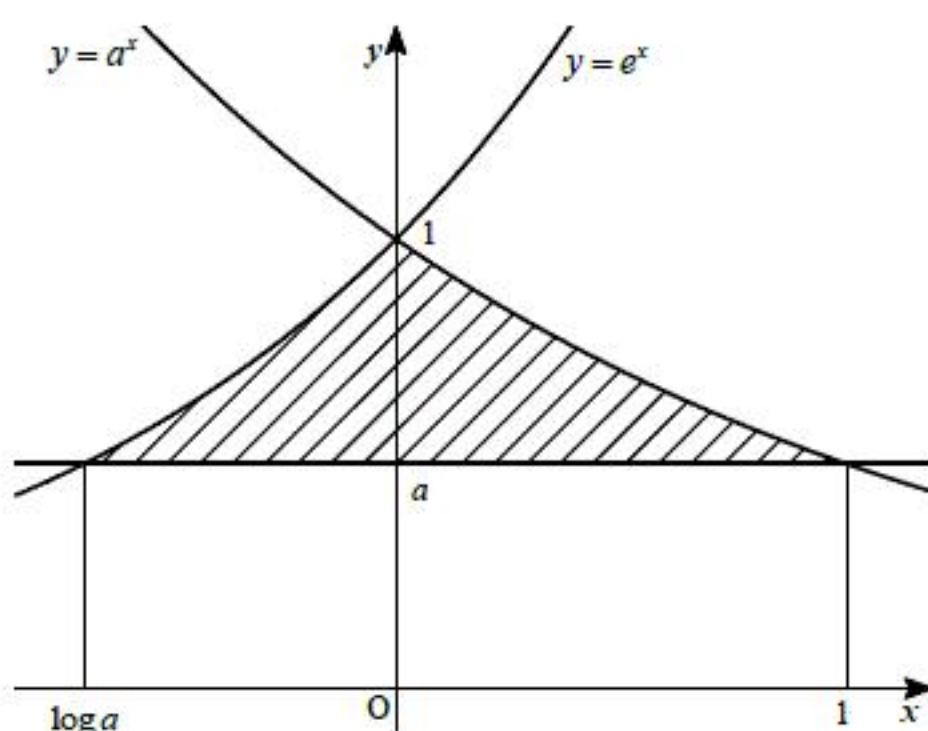
$$\begin{aligned} e^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= \log a \end{aligned}$$

であり、曲線 $y = a^x$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} a^x &= a \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

である。

[1] $0 < a < 1$ のとき

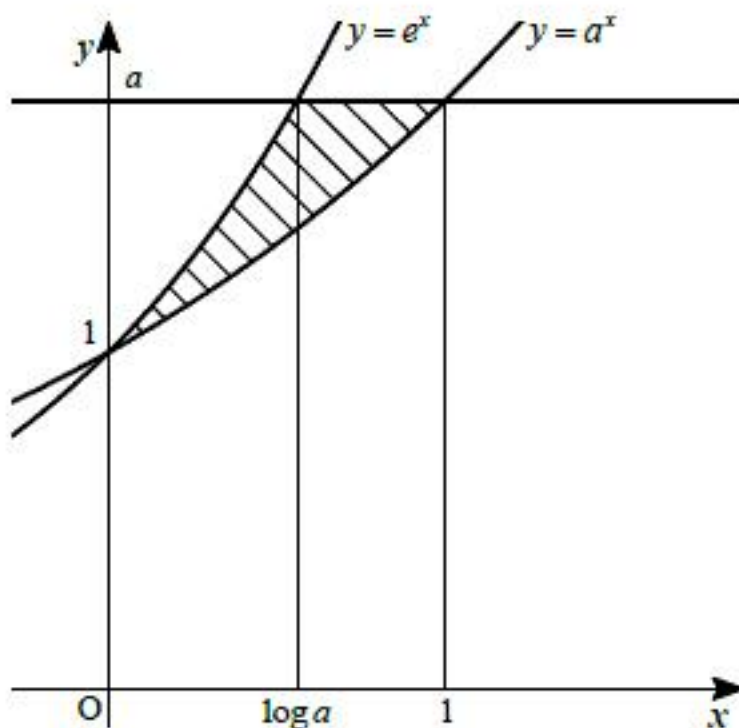


2 曲線 $y = a^x$, $y = e^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\log a}^0 (e^x - a) dx + \int_0^1 (a^x - a) dx &= [e^x - ax]_{\log a}^0 + \left[\frac{a^x}{\log a} - ax \right]_0^1 \left(\because (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= 1 - e^{\log a} + a \log a + \frac{a}{\log a} - a - \frac{1}{\log a} \\ &= \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \left(\because e^{\log a} = a \right) \end{aligned}$$

となる。

[2] $a > 1$ のとき



2 曲線 $y = a^x$, $y = e^x$ と直線 $y = a$ で囲まれた図形は上図の斜線部のようになる。この図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\log a} e^x dx + (1 - \log a) \cdot a - \int_0^1 a^x dx &= [e^x]_0^{\log a} + a(1 - \log a) - \left[\frac{a^x}{\log a} \right]_0^1 \left(\because (a^x)' = a^x \log a \right) \\ &= e^{\log a} - 1 + a - a \log a - \frac{a}{\log a} + \frac{1}{\log a} \\ &= \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \left(\because e^{\log a} = a \right) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \quad (0 < a < 1) \\ \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \quad (1 < a) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a-1}{\log a} + a \log a - 2a + 1 \quad (0 < a < 1), \quad \frac{1-a}{\log a} - a \log a + 2a - 1 \quad (1 < a)$$

(1)

$n=1$ のとき、高さが1となるのはAを1個積み上げる場合のみであるから

$$a_1 = 1$$

である。 $n=2$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A, B$$

と積み上げる場合があるから

$$a_2 = 2$$

である。 $n=3$ のとき、高さが2となるのは下から順に

$$A \rightarrow A \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow A$$

と積み上げる場合があるから

$$a_3 = 3$$

である。

(答) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

(2)

Bをちょうど k 個使って高さ n の塔を作るとき、Aは $n-2k$ 個必要であるから、積み木の数
は全部で $(n-2k)+k=n-k$ 個ある。このときの積み上げ方の場合の数は、A、Bの並べ方を考
えて

$${}_{n-k}C_k = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$$

となる。

(答) $\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \text{通り}$

(3)

積み木を積み上げて高さ11の塔を作るとき、使用するBの積み木の個数は0, 1, 2, ..., 5個の
いずれかである。したがって、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{k=0}^5 \frac{(11-k)!}{k!(11-2k)!} \\ &= \frac{11!}{0!11!} + \frac{10!}{1!9!} + \frac{9!}{2!7!} + \frac{8!}{3!5!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{5!1!} \\ &= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 \\ &= 144 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{11} = 144$

(4)

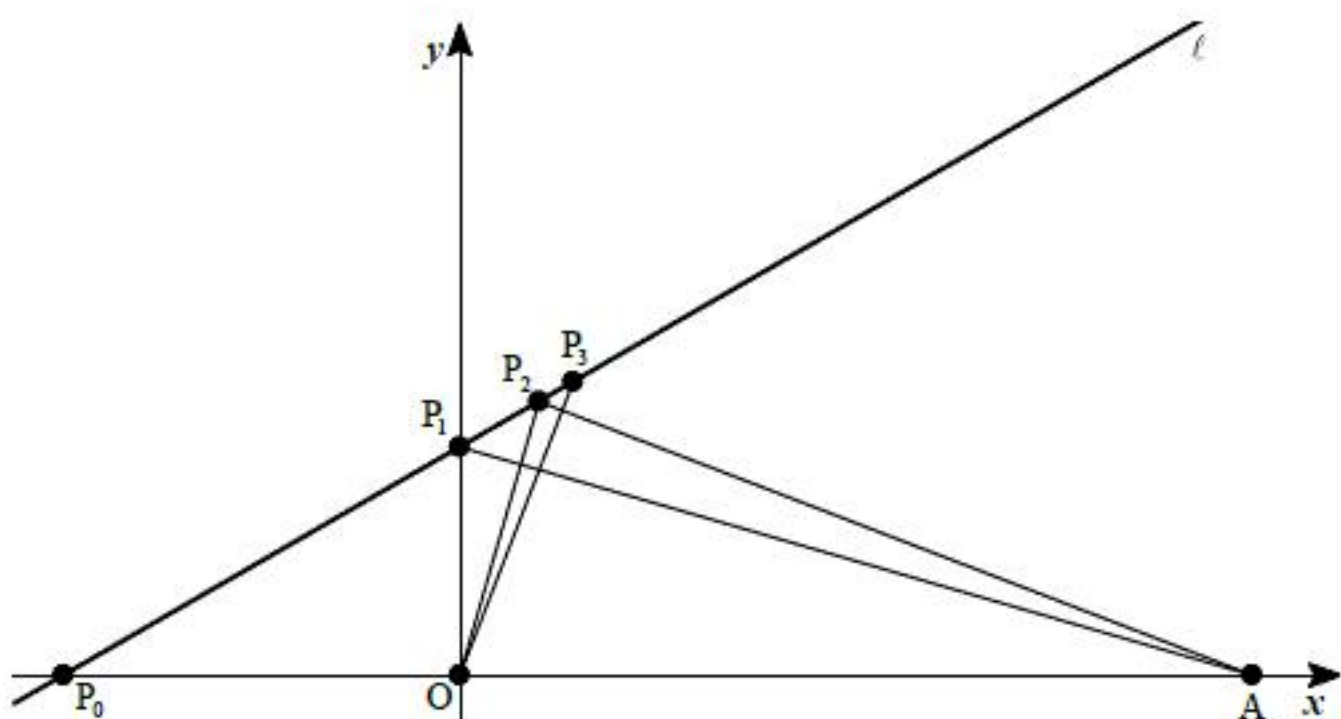
Aが9個まで、Bが4個まで使えるとき、高さ11の塔を作る場合の数は a_{11} からAを11個使
う場合とAを1個、Bが5個使う場合の数を除いた場合の数であるから

$$144 - 1 - 6 = 137$$

となる。

(答) 137通り

3



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= \overrightarrow{OP_0} + t_1 \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_1 (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_1 - 1, \sqrt{3}t_1)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{AP_0}$, $\overrightarrow{AP_0} = (-3, 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{AP_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_1 - 1) \cdot (-3) + \sqrt{3}t_1 \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow t_1 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $t_1 = \frac{1}{3}$

(2)

$n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} &= \overrightarrow{OP_0} + t_n \vec{d} \\ &= (-1, 0) + t_n (3, \sqrt{3}) \\ &= (3t_n - 1, \sqrt{3}t_n)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_{n-1}} &= \overrightarrow{OP_{n-1}} - \overrightarrow{OA} \\ &= (3t_{n-1} - 3, \sqrt{3}t_{n-1})\end{aligned}$$

である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ において $\overrightarrow{OP_n} \perp \overrightarrow{AP_{n-1}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} \cdot \overrightarrow{AP_{n-1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t_n - 1) \cdot (3t_{n-1} - 3) + \sqrt{3}t_n \cdot \sqrt{3}t_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 12t_n t_{n-1} - 9t_n - 3t_{n-1} + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $4t_n t_{n-1} - 3t_n - t_{n-1} + 1 = 0 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$

(3)

(2)の結果より

$$t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{7}$$

であるから

$$t_n = \frac{n}{2n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

と推測される。②が正しいことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$t_1 = \frac{1}{3}$$

であるから、②は正しい。

[2] $n = k$ のとき

②が正しい、つまり

$$t_k = \frac{k}{2k+1}$$

であると仮定する。このとき、①より

$$\begin{aligned}4t_{k+1}t_k - 3t_{k+1} - t_k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t_{k+1} \cdot \frac{k}{2k+1} - 3t_{k+1} - \frac{k}{2k+1} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2k+3)t_{k+1} &= k+1 \\ \Leftrightarrow t_{k+1} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \ (\because 2k+3 \neq 0)\end{aligned}$$

となるから、 $n = k+1$ のときも②は正しい。

以上、[1]、[2]より、すべての自然数 n について②は正しいことが示された。よって

$$t_n = \frac{n}{2n+1}$$

であり、(2)の考察より

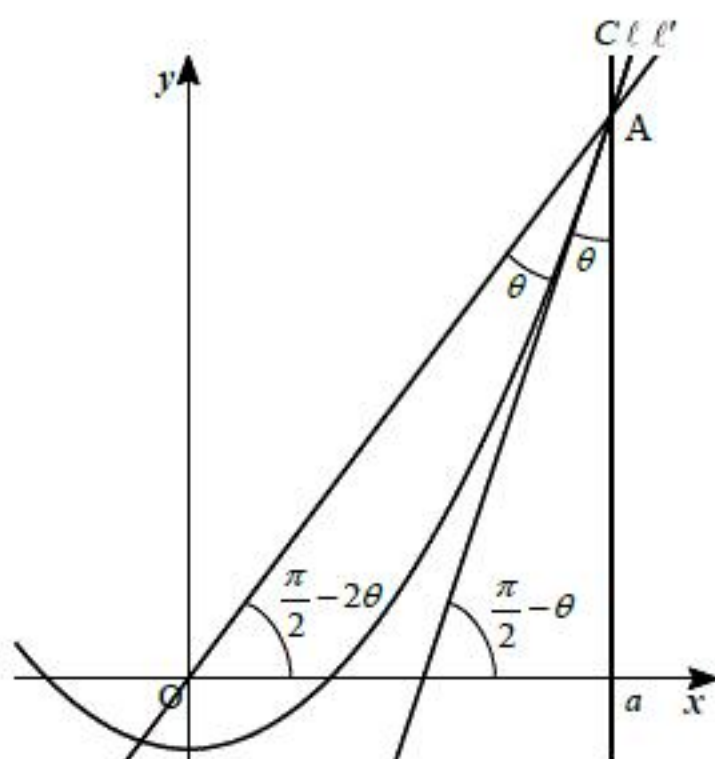
$$\overrightarrow{OP_n} = \left(\frac{3n}{2n+1} - 1, \frac{\sqrt{3}n}{2n+1} \right)$$

となるから、点 P_n の x 座標が $\frac{33}{67}$ であるとき

$$\begin{aligned}\frac{3n}{2n+1} - 1 &= \frac{33}{67} \\ \Leftrightarrow \frac{3n}{2n+1} &= \frac{100}{67} \\ \Leftrightarrow 201n &= 200n + 100 \\ \Leftrightarrow n &= 100\end{aligned}$$

となる。

(答) $n = 100$



(1)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = x$$

であるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線 l の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = a(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad l: y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$$

(2)

直線 $x = a$ と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2}$ であり、直線 $x = a$ と l のなす角が $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ で

あるとき、 l と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。このとき、 l の傾きは $f'(a)$ であるから

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = a$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{a} \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{1}{a}$$

(3)

求める直線を l' とすると、 l' と x 軸の正の向きとなす角は $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ であり、 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$

であるから、 l' の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a^2 - 1}{2a} \end{aligned}$$

となる。よって、求める直線 l' の方程式は

$$y = \frac{a^2 - 1}{2a}(x - a) + \frac{1}{2}(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{a^2 - 1}{2a}x$$

5

(1)

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ であるとき

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $A^2 = -E$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{a^2 + 1} \quad (\because b > 0) \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (a, b) = (0, 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 0, b = 1$

(2)

$A^2 = -E$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき, } A^n &= E \\ n \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき, } A^n &= A \\ n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき, } A^n &= -E \\ n \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき, } A^n &= -A \end{aligned}$$

となるから

$$A^n + A^{n+1} + A^{n+2} + A^{n+3} = O$$

である。よって

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{15} + A^{16} + A^{17} &= A + (A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + \cdots + (A^{14} + A^{15} + A^{16} + A^{17}) \\ &= A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{15} + A^{16} + A^{17} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $AB = BA$ が成り立つ。よって

$$(A^{17} + A^{16}B + A^{15}B^2 + \cdots + A^2B^{15} + AB^{16} + B^{17})(A - B) = A^{18} - B^{18} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$A - B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} \det(A - B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 - \sqrt{3} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $A - B$ は逆行列をもち

$$\begin{aligned} (A - B)^{-1} &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2 + \sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また、(2)より

$$A^{18} = -E$$

であり

$$\begin{aligned} B^{18} &= \begin{pmatrix} \cos\left(18 \times \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(18 \times \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(18 \times \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(18 \times \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 12\pi & -\sin 12\pi \\ \sin 12\pi & \cos 12\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^{18} - B^{18} &= -E - E \\ &= -2E \end{aligned}$$

となる。以上より、①の両辺に左から $(A - B)^{-1}$ をかけて

$$\begin{aligned} A^{17} + A^{16}B + A^{15}B^2 + \cdots + A^2B^{15} + AB^{16} + B^{17} &= (A - B)^{-1} (A^{18} - B^{18}) \\ &= (A - B)^{-1} (-2E) \\ &= -2(A - B)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $A^{17} + A^{16}B + A^{15}B^2 + \cdots + A^2B^{15} + AB^{16} + B^{17} = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$