

(1)

$$a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

とおく。 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ であるから、2以上の自然数 m に対して、 $a^m \leq a^2, b^m \leq b^2$ が成り立ち、したがって、

$$a^m + b^m \leq a^2 + b^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

となる。一方で、このとき、

$$a+b=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}>1$$

であるから、命題「 $a^m + b^m < 1$ ならば、 $a+b \leq 1$ である」には反例が存在する。よってこの命題は偽である。

(証明終)

(2)

命題「 $a+b < 1$ ならば、すべての自然数 n に対して $a^n + b^n < 1$ である」は真である。実際、 $a \geq 0, b \geq 0, a+b < 1$ から

$$0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1$$

となる。したがって、すべての自然数 n に対して、 $a^n \leq a, b^n \leq b$ が成り立つ。ここで、仮定 $a+b < 1$ を用いると、

$$a^n + b^n \leq a + b < 1$$

となることが示される。

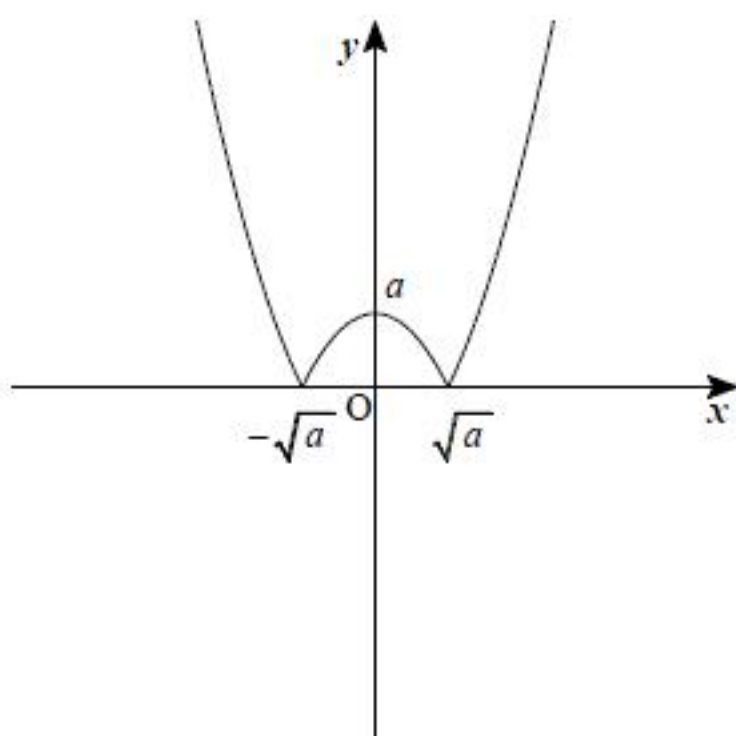
(証明終)

2

(1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & x \geq \sqrt{a}, x \leq -\sqrt{a} \text{ のとき} \\ a - x^2 & -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \text{ のとき} \end{cases}$$

となるので求めるグラフは下のようになる。

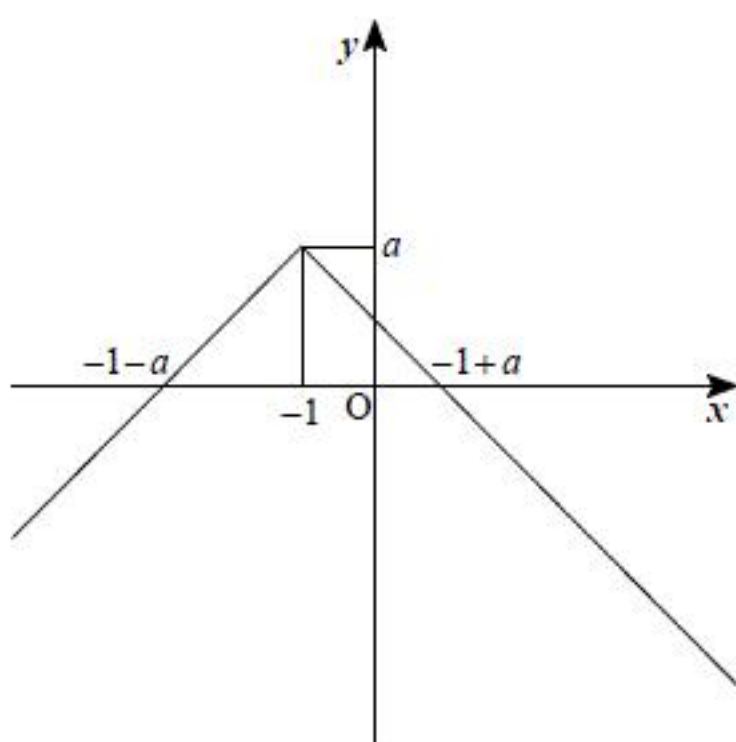


(答) 前図

(2)

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 + a & x \geq -1 \text{ のとき} \\ x + 1 + a & x < -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となるので求めるグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(3)

$a > 1$ より $-1-a < -\sqrt{a} < -1 < \sqrt{a}$ であることに注意する。 $f(x)$, $g(x)$ の絶対値の外れ方に注意して場合分けをする。

[1] $x < -\sqrt{a}$ のとき

$$g(-1-a) < f(-1-a),$$

$$f(-\sqrt{a}) < g(-\sqrt{a}),$$

$f(x)$ は単調増加, $g(x)$ は単調減少

であることから, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はこの区間でただ一つの共有点をもつ。

[2] $-\sqrt{a} \leq x \leq -1$ のとき

$$f(x) - g(x) = a - x^2 - (x + 1 + a) = -x^2 - x - 1 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$$

であるから, この区間においては $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は共有点を持たない。

[3] $-1 < x < \sqrt{a}$ のとき

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - x^2 - (-x - 1 + a) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるから, $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ における共有点は常に存在し, $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ における共有点は,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < a$$

のときに存在する。

[4] $\sqrt{a} \leq x$ のとき,

$$f(\sqrt{a}) = 0,$$

$$g(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} - 1 + a,$$

$f(x)$ は単調増加, $g(x)$ は単調減少

であることから, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $-\sqrt{a} - 1 + a \geq 0$ のとき, すなわち,

$$-\sqrt{a} - 1 + a \geq 0, a > 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 \geq 0, a > 1$$

$$\therefore a \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

のときただ一つの共有点を持ち, $a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ であれば, 共有点を持たない。

以上, [1]から[4]より,

交点の数	a の範囲または値
2 個	$1 < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
3 個	$a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
4 個	$a > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

となる。

(答) 前表