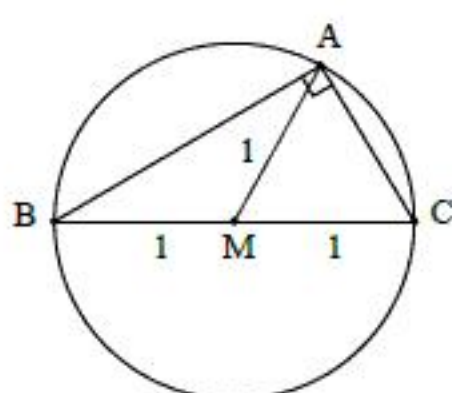


1

(1)



$\triangle ABC$ は問題文の条件から上図のようになり、点Mを中心とした半径1の円に内接することがわかる。また、逆に点Mを中心とした半径1の円に内接し、1辺が円の直径になっているような三角形は問題文の条件を満たすことがわかる。よって、点Aは弧BC上を点Bから点Cを動き得る(ただし、点B, Cに重なることはない)から、辺ABの長さの値が動き得る範囲は

$$0 < AB < 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。一方、内積の定義より

$$t = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|^2$$

であるから、求める t の動き得る範囲は①より

$$0 < t < 4$$

となる。

(答) $0 < t < 4$

(2)

$\triangle ABC$ の面積をベクトル $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ で表すと

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 \cdot |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2}$$

となるから、この値が $\frac{\sqrt{7}}{4}$ となるのは、(1)より

$$\frac{1}{2} \sqrt{4t - t^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t - t^2}{4} = \frac{7}{16}$$

$$\Leftrightarrow 16t - 4t^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (2t - 7)(2t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

のときであることがわかる。これらは(1)の条件を満たす。

(答) $t = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$

(3)

中線定理より

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

が成り立つ。(1)より $AB^2 = t$ であるから

$$AC^2 = 4 - t$$

$$\therefore AC = \sqrt{4 - t}$$

となる。よって

$$AB + BC + CA = \sqrt{t} + 2 + \sqrt{4 - t}$$

となるから、この値の $0 < t < 4$ の範囲における最大値を求めればよい。ここで、コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} \sqrt{t} + \sqrt{4 - t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{4 - t} \end{pmatrix} \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{t})^2 + (\sqrt{4 - t})^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

が成り立ち、等号成立は

$$\sqrt{t} = \sqrt{4 - t} \Leftrightarrow t = 2$$

のときである。したがって、求める最大値は

$$2 + \sqrt{2}$$

であることがわかる。

(答) 最大値: $2 + \sqrt{2}$, そのときの t の値: 2

2

(1)

$f(x) = x - 1 + 2\sqrt{x-1}$ とおき、接線 l の接点を $(a, f(a))$ とおく。 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

となるから、接線 l の方程式は

$$y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)(x-a) + f(a)$$

$$\therefore y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)x - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。以下この直線が点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るときを考える。

$$0 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{a-1} + 1 - 2a - 2\sqrt{a-1} + 4(a-1)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 3 = \sqrt{a-1}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 12a + 9 = a - 1$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 13a + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{4}, 2$$

となるが、ここで $a = \frac{5}{4}$ のとき

$$2a - 3 = -\frac{1}{2} \neq \sqrt{a-1}$$

であるから、これは不適。一方 $a = 2$ のときは

$$2a - 3 = 1 = \sqrt{a-1}$$

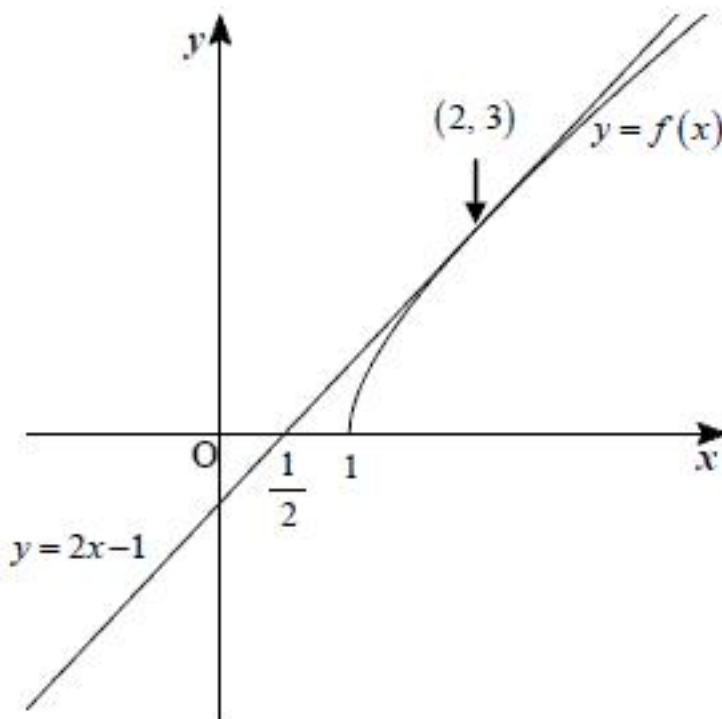
となるから、条件を満たす。よって $a = 2$ を $\textcircled{1}$ に代入することで、求める直線 l の方程式は

$$y = 2x - 1$$

とわかる。

(答) $y = 2x - 1$

(2)



まず、曲線 C と接線 l の上下関係を調べる。 $f(x)$ は $1 \leq x$ でのみ定義されることに加えて

$$\begin{aligned} 2x - 1 - f(x) &= x - 2\sqrt{x-1} \\ &= (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= (\sqrt{x-1} - 1)^2 \end{aligned}$$

であるから、上図のような位置関係になる。よって、求める立体の体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)^2 dx - \pi \int_1^2 (x-1+2\sqrt{x-1})^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (2x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x+2\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{8} - \frac{1}{3} - \frac{8}{5} - 2 \right) \pi \\ &= \frac{17}{30} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{17}{30} \pi$

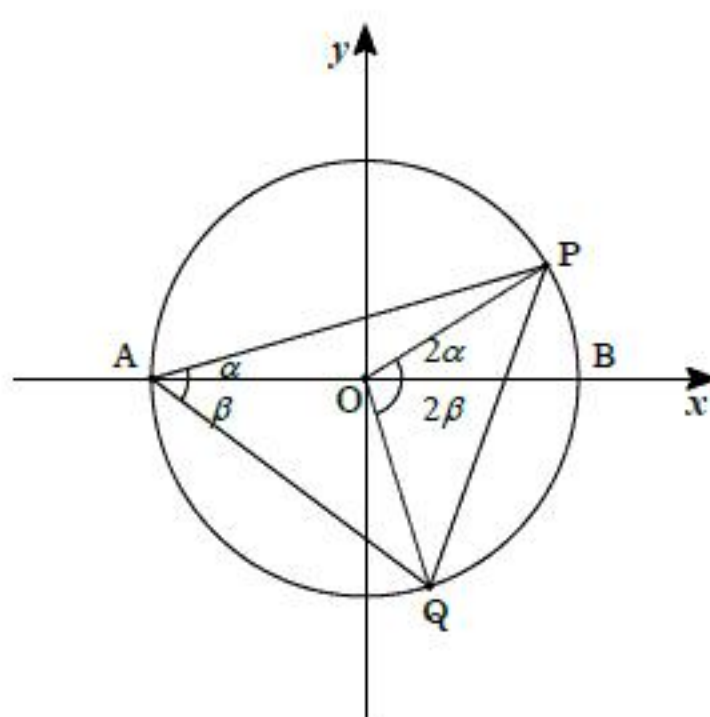
3

(1)

円周角の定理より

$$\angle POB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

となる。よって、P の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ となる。同様にして、Q の座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ と求まる。



よって直線 PQ の方程式は

$$(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(y - \sin 2\alpha) = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)(x - \cos 2\alpha)$$

となる。(t, 0) を代入すると

$$-\cos 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)t - \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (\because 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin 2\alpha, \sin 2\beta > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

(2)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角関数の和積公式を使うことで、(1)で求めた式は

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin 2\alpha + \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで①より

$$-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

となる。したがって、t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

(1)

A_n 中の基石の数は $n \times 3 = 3n$ 個である。また A_n において右下の基石は $2n+1$ 番目にあるから、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 2n + 1 \\ &= \frac{3(n-1)n}{2} + 2n + 1 \\ &= \frac{3n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$a_n = \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

(2)

A_n において 1 番上の基石の番号を b_n とする。(1)と同様に考えれば、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 1 \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n} \{b_n + (k-1)\} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \cdot 3n + \frac{3n(3n+1)}{2} - 3n \\ &= \frac{9n^3 + 3n}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{9n^3 + 3n}{2}$$

(3)

(2)より、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k \left(S_k - \frac{3}{2}k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{9}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^4 \\ &= \int_0^1 \frac{9}{2} x^4 dx \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{10}$$

(1)

点 (x, y) を題意で与えられた一次変換によって移した後の点を (a, b) とおくと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。これを (x, y) について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{-1-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。この方程式に $(a, b) = (187, 110)$ を代入することでこの一次変換によって移る前の点を求めると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 187 \\ 110 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 297 \\ 264 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 99 \\ 88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、このとき $(x, y) = (99, 88)$ は X_{100} に含まれるから $(187, 110)$ は Y_{100} に含まれる。

(答) 含まれる

(2)

点 (x, y) はこの一次変換によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

に移るから、 $X_5 \cap Y_5$ の点の個数を求めるには

$$\begin{cases} 0 \leq x+y \leq 5 & \cdots \textcircled{1} \\ 0 \leq 2x-y \leq 5 & \cdots \textcircled{2} \\ 0 \leq x, y \leq 5 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めればよい。以下 y の値で場合分けして個数を数える。

[1] $y=0$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $0 \leq 2x \leq 5$ を満たす整数 x の個数は 3 個である。

[2] $y=1$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-1 \leq x \leq 4$ かつ $1 \leq 2x \leq 6$ を満たす整数 x の個数は 3 個である。

[3] $y=2$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-2 \leq x \leq 3$ かつ $2 \leq 2x \leq 7$ を満たす整数 x の個数は 3 個である。

[4] $y=3$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-3 \leq x \leq 2$ かつ $3 \leq 2x \leq 8$ を満たす整数 x の個数は 1 個である。

[5] $y=4, 5$ のとき

①かつ②を満たす整数 x は存在しない。

よって[1]~[5]より、求める点の個数は

$$3+3+3+1+0+0=10 \text{ [個]}$$

である。

(答) 10 個