

1

(1)

与えられた不等式を変形すると

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x &< -6 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x + 3)(\log_2 x + 2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -3 < \log_2 x &< -2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x &< \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。これは $0 < x < 2$ に含まれるから、求める解は

$$\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$$

(2)

与えられた不等式を変形すると

$$\begin{aligned}\sin x + \cos 2x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \sin x &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2n\pi, &\quad \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \leq x \leq \pi + 2n\pi \quad (\text{ただし } n \text{ は任意の整数})\end{aligned}$$

ここで

$$\pi > 3$$

であることを利用すると、 $0 < x < 2$ との共通部分は

$$0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

(3)

$\pi > 3$ であることを利用すると

$$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

となる。よって命題「 p ならば q である。」は真であり「 q ならば p である。」は偽である。

したがって、 p は q であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(答) ②

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 8 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 - 2x = 8 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

について①-②より

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2y + 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。

[1] $x-y=0$ 即ち $x=y$ であるとき

$x=y$ を①に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 4 \end{aligned}$$

となるよってこのとき連立方程式の解は

$$(x, y) = (-2, -2), (4, 4)$$

となる。

[2] $x \neq y$ であるとき

$$\begin{aligned} x+y+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -x-2 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 - 2(-x-2) &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

となるよってこのとき連立方程式の解は

$$(x, y) = (-1 \pm \sqrt{5}, -1 \mp \sqrt{5}) \quad (\text{複合同順})$$

となる。これらは $x \neq y$ を満たす。

以上[1], [2]より求める連立方程式の解は

$$(x, y) = (-1 \pm \sqrt{5}, -1 \mp \sqrt{5}), (-2, -2), (4, 4) \quad (\text{複合同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = (-1 \pm \sqrt{5}, -1 \mp \sqrt{5}), (-2, -2), (4, 4) \quad (\text{複合同順})$$

(1)

まず実数 α をひとつに固定する。直線 $l(\alpha)$ の方程式は

$$y = \alpha(x - \alpha)$$

$$\therefore y = \alpha x - \alpha^2$$

となる。この直線が放物線 $y = px^2 + qx + r$ ($p \neq 0$) と接するための α の条件は、2 式を連立してできる 2 次方程式

$$\alpha x - \alpha^2 = px^2 + qx + r$$

$$\Leftrightarrow px^2 + (q - \alpha)x + r + \alpha^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつことである。よって、この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$$D = (q - \alpha)^2 - 4p(r + \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4p - 1)\alpha^2 - 2q\alpha + 4pr - q^2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

をみたすことが α についての条件である。したがって、 $\textcircled{2}$ が任意の実数 α に対して成立するような p, q, r を求めればよく、このとき

$$\begin{cases} 4p - 1 = 0 \\ -2q = 0 \\ 4pr - q^2 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$p = \frac{1}{4}, q = 0, r = 0 \quad (p \neq 0 \text{ を満たす})$$

と求まる。 $\textcircled{1}$ より、このときの接点の x 座標は

$$x = -\frac{q - \alpha}{2p} = 2\alpha$$

となるから、求める接点の座標は

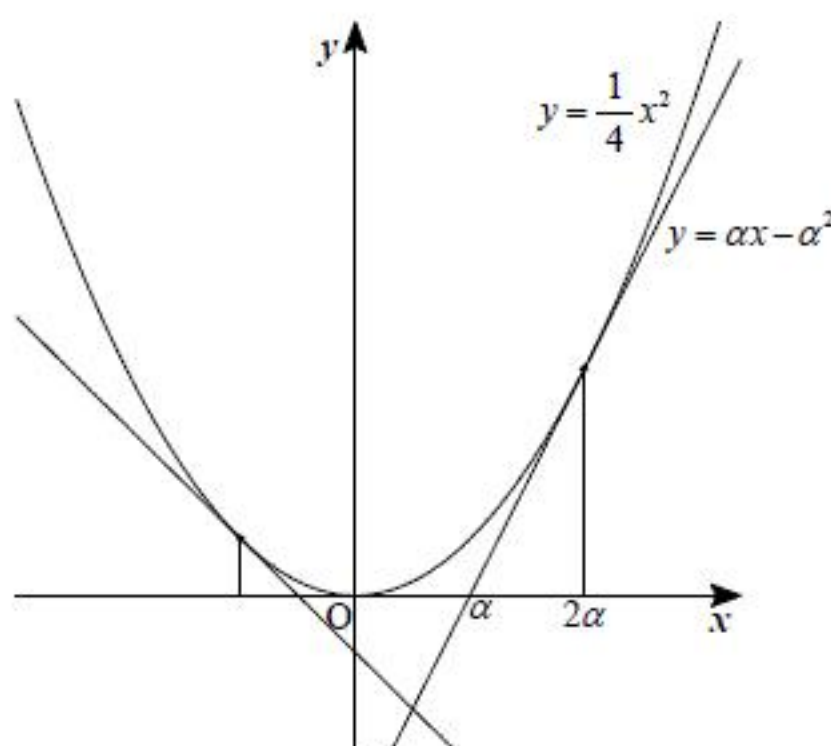
$$(x, y) = (2\alpha, \alpha^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{4}, q = 0, r = 0, \text{ 接点の座標: } (2\alpha, \alpha^2)$$

(2)

求める面積を S とおく。与えられた放物線と直線 $l(\alpha)$ の位置関係は以下のようになる。



[1] $\alpha > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\alpha} \frac{1}{4}x^2 dx - \int_{\alpha}^{2\alpha} (\alpha x - \alpha^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^{2\alpha} - \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \alpha^2 x \right]_{\alpha}^{2\alpha} \\ &= \frac{\alpha^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\alpha < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{2\alpha}^0 \left(\frac{1}{4}x^2 \right) dx - \int_{2\alpha}^{\alpha} (\alpha x - \alpha^2) dx \\ &= -\frac{\alpha^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より求める面積は

$$S = \frac{|\alpha^3|}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{|\alpha^3|}{6}$$

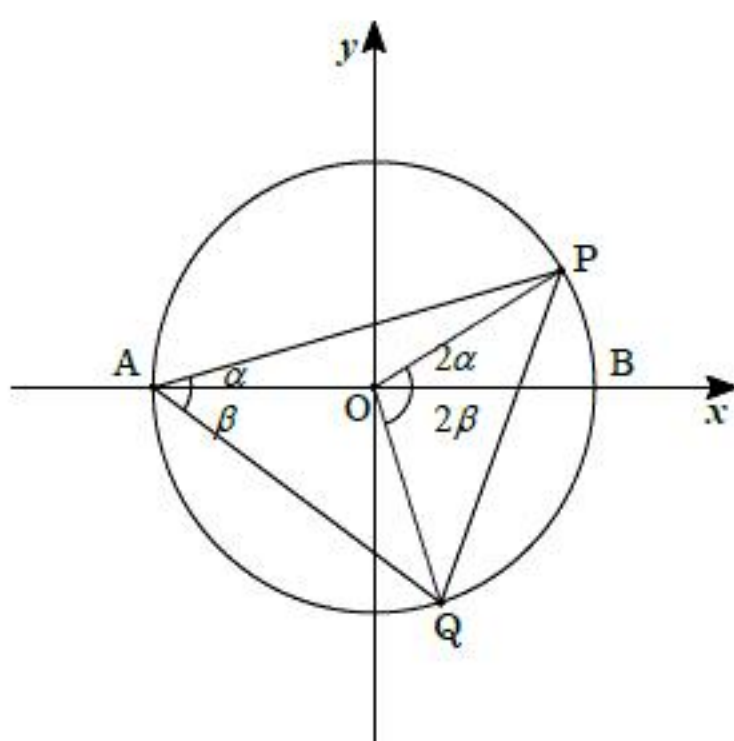
4

(1)

円周角の定理より

$$\angle POB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

となる。よって、Pの座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ となる。同様にして、Qの座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ と求まる。



よって直線PQの方程式は

$$(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(y - \sin 2\alpha) = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)(x - \cos 2\alpha)$$

となる。 $(t, 0)$ を代入すると

$$-\cos 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)t - \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (\because 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin 2\alpha, \sin 2\beta > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

(2)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角関数の和積公式を使うことで、(1)で求めた式は

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin 2\alpha + \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで①より

$$-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

となる。したがって、 t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

5

(1)

$\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ であるから

$$|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{10}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 5 = 4$$

となる。これより

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= (1-2t)^2 |\vec{a}|^2 + 2(1-2t)t \vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 5(1-2t)^2 + (2t-4t^2) \cdot 4 + 10t^2 \\ &= 10t^2 - 10t + 5 \\ &= 10 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq t \leq 1$ より $t = -1$ において $|\vec{p}|^2$ は最大となる。そのとき

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= 25 \\ \therefore |\vec{p}| &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5

(2)

(1)より, $t = \frac{1}{2}$ において $|\vec{p}|^2$ は最小となる。このとき

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \frac{5}{2} \\ \therefore |\vec{p}| &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $|\vec{p}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(3)

$t = \frac{1}{2}$ のとき, $\vec{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$, $\vec{OA} = (1, 2)$ となるため

$$\begin{aligned} \triangle OAM &= \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{2} \times 1 \right| \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{4}$