

1

(1)

201^{20} の十億の位の数字は、 201^{20} を百億 ($=10^{10}$) で割ったときの小数第一位の数字と一致する。2項定理より

$$(200+1)^{20} = \sum_{n=0}^{20} {}_{20}C_n (200)^n$$

となる。ここで

$${}_{20}C_n (200)^n = {}_{20}C_n 2^n (10)^{2n}$$

となるから、 $n \geq 5$ のとき ${}_{20}C_n 2^n (10)^{2n}$ は百億で割り切れる。よって、 $\sum_{n=5}^{20} {}_{20}C_n (200)^n$ は百億で割り切れる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^4 {}_{20}C_n \cdot (200)^n &= 1 + 40 \cdot 10^2 + 760 \cdot 10^4 + 9120 \cdot 10^6 + 77520 \cdot 10^8 \\ &= 776.1127604001 \cdot 10^{10} \end{aligned}$$

であるから、 201^{20} の十億の位の数字は 1 となる。

(答) 1

(2)

(1)より、 $n \geq 4$ のとき ${}_{20}C_n (200)^n$ は百億で割り切れるから、これは 4×10^7 で割り切れる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 {}_{20}C_n (200)^n &= 6127604001 \\ &= 6120000000 + 7604001 \\ &= 153 \times 4 \times 10^7 + 7604001 \end{aligned}$$

であるから、 201^{20} を 4×10^7 で割った余りは

$$7604001$$

となる。

(答) 7604001

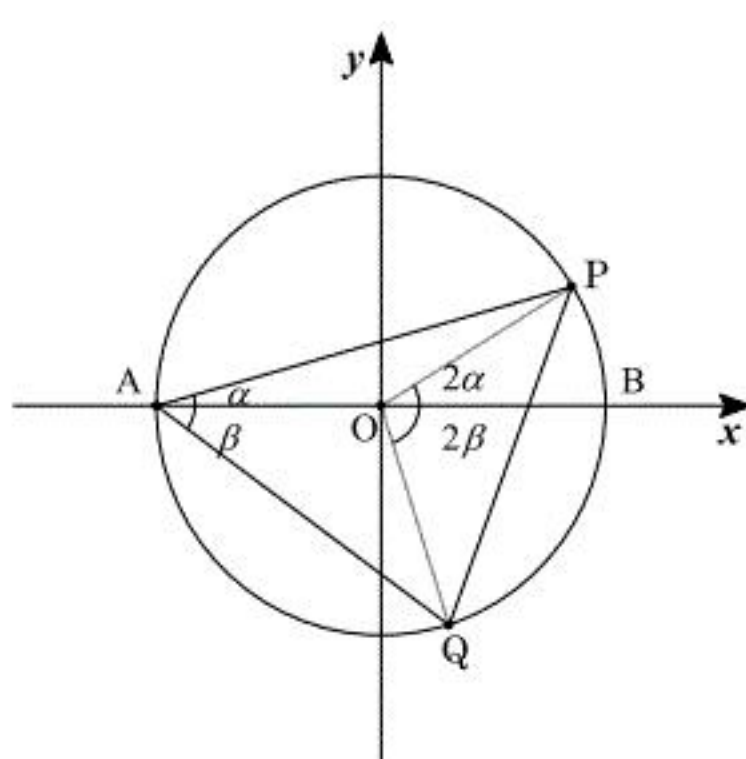
3

(1)

円周角の定理より

$$\angle POB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

となる。よって、Pの座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ となる。同様にして、Qの座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ と求まる。



よって直線 PQ の方程式は

$$(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(y - \sin 2\alpha) = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)(x - \cos 2\alpha)$$

となる。 $(t, 0)$ を代入すると

$$-\cos 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)t - \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (\because 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin 2\alpha, \sin 2\beta > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

(2)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角関数の和積公式を使うことで、(1)で求めた式は

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin 2\alpha + \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで①より

$$-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

となる。したがって、 t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

(3)

3点 P, Q, R は同一直線上にあるので $PR : RQ = 2 : 1$ であるとき

$$\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{RQ}$$

となる。ここで、Pの座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ 、Qの座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ 、Rの座標は $(t, 0)$

であるから

$$\begin{cases} t - \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta - 2t & \dots \textcircled{1} \\ -\sin 2\alpha = -2\sin 2\beta & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。②から

$$\begin{aligned} \sin^2 2\alpha &= 4\sin^2 2\beta \\ \therefore \cos 2\beta &= \frac{\pm\sqrt{4 - \sin^2 2\alpha}}{2} \end{aligned}$$

となる。これと①から

$$\begin{aligned} 3t &= 2\cos 2\beta + \cos 2\alpha \\ \therefore t &= \frac{\cos 2\alpha \pm \sqrt{4 - \sin^2 2\alpha}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\cos 2\alpha \pm \sqrt{4 - \sin^2 2\alpha}}{3}$$

(1)

点 (x, y) を題意で与えられた一次変換によって移した後の点を (a, b) とおくと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。これを (x, y) について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{-1-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。この方程式に $(a, b) = (187, 110)$ を代入することでこの一次変換によって移る前の点を求めると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 187 \\ 110 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 297 \\ 264 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 99 \\ 88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、このとき $(x, y) = (99, 88)$ は X_{100} に含まれるから $(187, 110)$ は Y_{100} に含まれる。

(答) 含まれる

(2)

点 (x, y) はこの一次変換によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

に移るから、 $X_5 \cap Y_5$ の点の個数を求めるには

$$\begin{cases} 0 \leq x+y \leq 5 & \cdots \textcircled{1} \\ 0 \leq 2x-y \leq 5 & \cdots \textcircled{2} \\ 0 \leq x, y \leq 5 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めればよい。以下 y の値で場合分けして個数を数える。

[1] $y=0$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $0 \leq 2x \leq 5$ を満たす整数 x の個数は3個である。

[2] $y=1$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-1 \leq x \leq 4$ かつ $1 \leq 2x \leq 6$ を満たす整数 x の個数は3個である。

[3] $y=2$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-2 \leq x \leq 3$ かつ $2 \leq 2x \leq 7$ を満たす整数 x の個数は3個である。

[4] $y=3$ のとき

$0 \leq x \leq 5$ かつ $-3 \leq x \leq 2$ かつ $3 \leq 2x \leq 8$ を満たす整数 x の個数は1個である。

[5] $y=4, 5$ のとき

①かつ②を満たす整数 x は存在しない。

よって[1]~[5]より、求める点の個数は

$$3+3+3+1+0+0=10 \text{ [個]}$$

である。

(答) 10 個

(3)

$X_{6m} \cap Y_{6m}$ の点の個数 a_{6m} を求める。(2)と同様にして、

$$\begin{cases} 0 \leq x+y \leq 6m \\ 0 \leq 2x-y \leq 6m \\ 0 \leq x, y \leq 6m \end{cases}$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めればよい。上の関係式を変形すると

$$\begin{cases} -x \leq y \leq 6m-x & \cdots \textcircled{4} \\ 2x-6m \leq y \leq 2x & \cdots \textcircled{5} \\ 0 \leq x, y \leq 6m & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

となる。以下 x の値で場合分けして個数を数える。

[1] $0 \leq x \leq 2m$ のとき

④かつ⑤かつ⑥を満たす条件は

$$0 \leq y \leq 2x$$

である。したがって、この条件を満たす整数の組 (x, y) の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{2m} (2x+1) &= 2 \sum_{x=1}^{2m} x + \sum_{x=0}^{2m} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} 2m(2m+1) + 2m+1 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \end{aligned}$$

である。

[2] $2m+1 \leq x \leq 3m$ のとき

④かつ⑤かつ⑥を満たす条件は

$$0 \leq y \leq 6m-x$$

である。したがって、この条件を満たす整数の組 (x, y) の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{x=2m+1}^{3m} (6m-x+1) &= (-1) \sum_{x=2m+1}^{3m} x + (6m+1) \sum_{x=2m+1}^{3m} 1 \\ &= -\frac{1}{2} 3m(3m+1) + \frac{1}{2} 2m(2m+1) + (6m+1)m \\ &= \frac{7}{2} m^2 + \frac{1}{2} m \end{aligned}$$

である。

[3] $3m+1 \leq x \leq 4m$ のとき

④かつ⑤かつ⑥を満たす条件は

$$2x-6m \leq y \leq 6m-x$$

である。したがって、この条件を満たす整数の組 (x, y) の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{x=3m+1}^{4m} (12m-3x+1) &= (-3) \sum_{x=3m+1}^{4m} x + (12m+1) \sum_{x=3m+1}^{4m} 1 \\ &= (-3) \frac{1}{2} 4m(4m+1) + 3 \frac{1}{2} 3m(3m+1) + (12m+1)m \\ &= \frac{3}{2} m^2 - \frac{1}{2} m \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2], [3]より

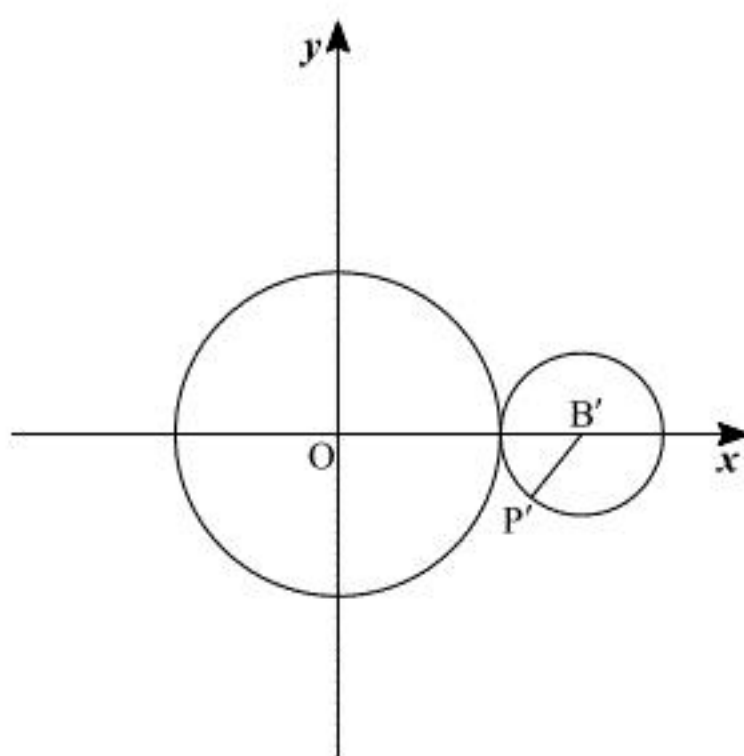
$$\begin{aligned} a_{6m} &= (4m^2 + 4m + 1) + \left(\frac{7}{2} m^2 + \frac{1}{2} m \right) + \left(\frac{3}{2} m^2 - \frac{1}{2} m \right) \\ &= 9m^2 + 4m + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{6m} = 9m^2 + 4m + 1$

5

(1)



動円の中心を B とおく。次に、図のように点 P, B を原点中心に $-\theta$ だけ回転移動させた点をそれぞれ P', B' とする。動円と円 A の半径の大きさの比は $1:2$ であるから

$$\angle OBP = 2\theta$$

となる。よって

$$\angle OB'P' = \angle OBP = 2\theta$$

となるから、点 P' の座標は

$$(3 - \cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

となる。点 P は点 P' を原点中心に θ だけ回転移動させた点であるから、点 P の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos \theta - \cos \theta \cos 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta \\ 3 \sin \theta - \sin \theta \cos 2\theta - \cos \theta \sin 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos \theta - \cos 3\theta \\ 3 \sin \theta - \sin 3\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(答) $(3 \cos \theta - \cos 3\theta, 3 \sin \theta - \sin 3\theta)$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} 3 \sin \theta - \sin 3\theta &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 \sin^3 \theta = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

となる。次に

$$\frac{dX}{d\theta} = -3 \sin \theta + 3 \sin 3\theta$$

$$\frac{dY}{d\theta} = 3 \cos \theta - 3 \cos 3\theta$$

となるから、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ における C の接線の傾きは

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dX}{d\theta}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2} + 3} = \sqrt{3}$$

となる。

(答) $\sqrt{3}$

(3)

題意で与えられた公式から、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \sin \theta + 3 \sin 3\theta)^2 + (3 \cos \theta - 3 \cos 3\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{18 - 18 \cos 2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin \theta d\theta \\ &= [-6 \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 6