

2

(1)

$f(x) = x - 1 + 2\sqrt{x-1}$ とおき、接線 l の接点を $(a, f(a))$ とおく。 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

となるから、接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)(x-a) + f(a) \\ \therefore y &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)x - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。以下この直線が点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るときを考える。

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1} \\ \Leftrightarrow 0 &= \sqrt{a-1} + 1 - 2a - 2\sqrt{a-1} + 4(a-1) \\ \Leftrightarrow 2a - 3 &= \sqrt{a-1} \\ \Rightarrow 4a^2 - 12a + 9 &= a - 1 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 13a + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5}{4}, 2 \end{aligned}$$

となるが、ここで $a = \frac{5}{4}$ のとき

$$2a - 3 = -\frac{1}{2} \neq \sqrt{a-1}$$

であるから、これは不適。一方 $a = 2$ のときは

$$2a - 3 = 1 = \sqrt{a-1}$$

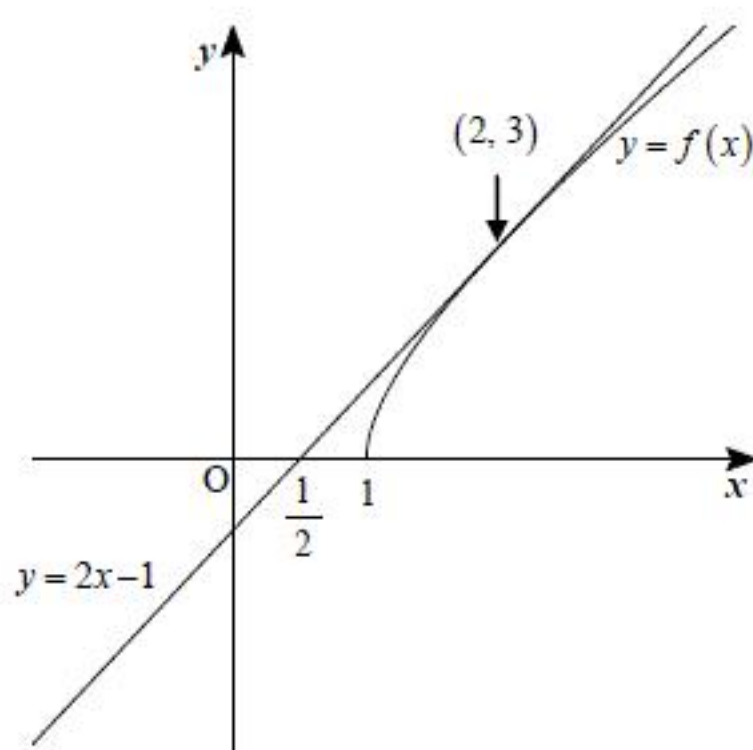
となるから、条件を満たす。よって $a = 2$ を①に代入することで、求める直線 l の方程式は

$$y = 2x - 1$$

とわかる。

(答) $y = 2x - 1$

(2)



まず、曲線 C と接線 l の上下関係を調べる。 $f(x)$ は $1 \leq x$ でのみ定義されることに加えて

$$\begin{aligned} 2x - 1 - f(x) &= x - 2\sqrt{x-1} \\ &= (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= (\sqrt{x-1} - 1)^2 \end{aligned}$$

であるから、上図のような位置関係になる。よって、求める立体の体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)^2 dx - \pi \int_1^2 (x-1+2\sqrt{x-1})^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (2x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x+2\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{8} - \frac{1}{3} - \frac{8}{5} - 2 \right) \pi \\ &= \frac{17}{30} \pi \end{aligned}$$

となる。

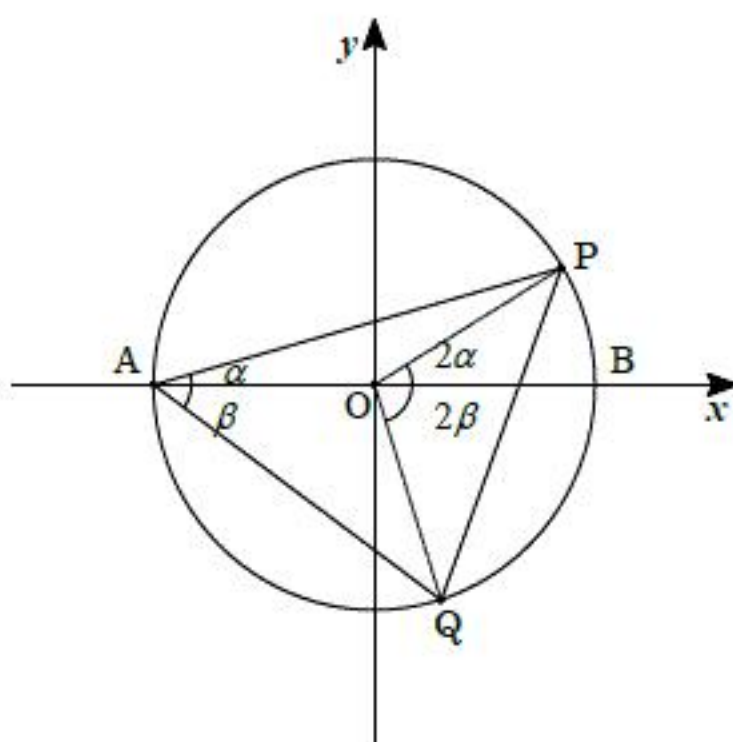
(答) $\frac{17}{30} \pi$

(1)

円周角の定理より

$$\angle POB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

となる。よって、Pの座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ となる。同様にして、Qの座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ と求まる。



よって直線PQの方程式は

$$(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(y - \sin 2\alpha) = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)(x - \cos 2\alpha)$$

となる。 $(t, 0)$ を代入すると

$$-\cos 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)t - \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (\because 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin 2\alpha, \sin 2\beta > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

(2)

 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角関数の和積公式を使うことで、(1)で求めた式は

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin 2\alpha + \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで①より

$$-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

であるから,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

となる。したがって、 t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

(1)

A_n 中の基石の数は $n \times 3 = 3n$ 個である。また A_n において右下の基石は $2n+1$ 番目にあるから、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 2n + 1 \\ &= \frac{3(n-1)n}{2} + 2n + 1 \\ &= \frac{3n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$a_n = \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

(2)

A_n において 1 番上の基石の番号を b_n とする。(1)と同様に考えれば、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 1 \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n} \{b_n + (k-1)\} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \cdot 3n + \frac{3n(3n+1)}{2} - 3n \\ &= \frac{9n^3 + 3n}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{9n^3 + 3n}{2}$$

(3)

(2)より、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k \left(S_k - \frac{3}{2} k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{9}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^4 \\ &= \int_0^1 \frac{9}{2} x^4 dx \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{10}$$

(1)

まず実数 α をひとつに固定する。直線 $l(\alpha)$ の方程式は

$$y = \alpha(x - \alpha)$$

$$\therefore y = \alpha x - \alpha^2$$

となる。この直線が放物線 $y = px^2 + qx + r$ ($p \neq 0$) と接するための α の条件は、2 式を連立してできる 2 次方程式

$$\alpha x - \alpha^2 = px^2 + qx + r$$

$$\Leftrightarrow px^2 + (q - \alpha)x + r + \alpha^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

が重解をもつことである。よって、この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$$D = (q - \alpha)^2 - 4p(r + \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4p - 1)\alpha^2 - 2q\alpha + 4pr - q^2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

をみたすことが α についての条件である。したがって、 $\textcircled{2}$ が任意の実数 α に対して成立するような p, q, r を求めればよく、このとき

$$\begin{cases} 4p - 1 = 0 \\ -2q = 0 \\ 4pr - q^2 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$p = \frac{1}{4}, q = 0, r = 0 \quad (p \neq 0 \text{ を満たす})$$

と求まる。 $\textcircled{1}$ より、このときの接点の x 座標は

$$x = -\frac{q - \alpha}{2p} = 2\alpha$$

となるから、求める接点の座標は

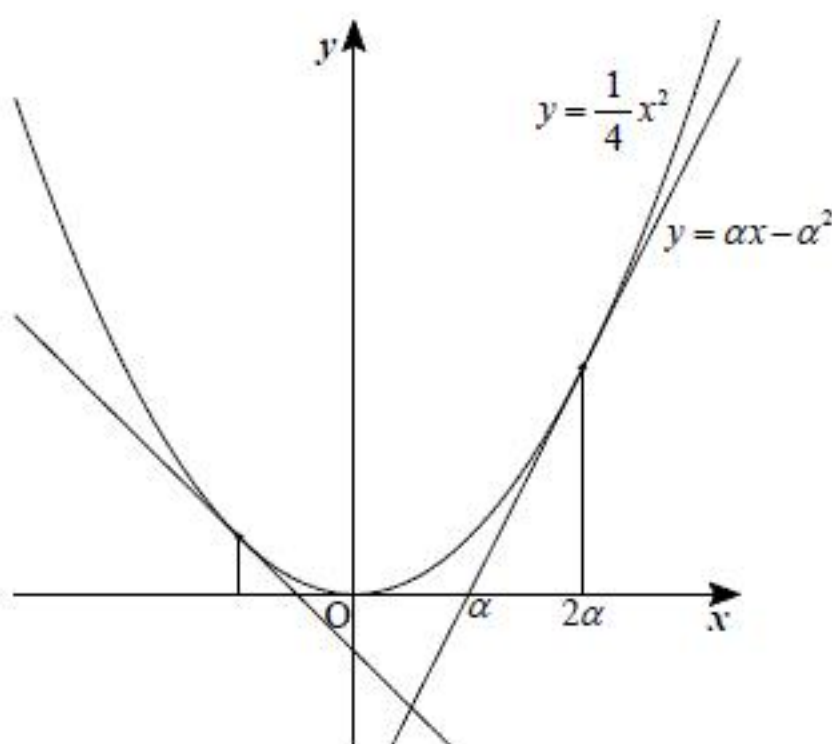
$$(x, y) = (2\alpha, \alpha^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{4}, q = 0, r = 0, \text{ 接点の座標: } (2\alpha, \alpha^2)$$

(2)

求める面積を S とおく。与えられた放物線と直線 $l(\alpha)$ の位置関係は以下のようになる。



[1] $\alpha > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\alpha} \frac{1}{4}x^2 dx - \int_\alpha^{2\alpha} (\alpha x - \alpha^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^{2\alpha} - \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \alpha^2 x \right]_\alpha^{2\alpha} \\ &= \frac{\alpha^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\alpha < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{2\alpha}^0 \left(\frac{1}{4}x^2 \right) dx - \int_{2\alpha}^\alpha (\alpha x - \alpha^2) dx \\ &= -\frac{\alpha^3}{6} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より求める面積は

$$S = \frac{|\alpha^3|}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{|\alpha^3|}{6}$$