

1

(1)

$\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ であるから

$$|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{10}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 5 = 5$$

となる。これより

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= (1-2t)^2 |\vec{a}|^2 + 2(1-2t)t \vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 5(1-2t)^2 + (2t-4t^2) \cdot 5 + 10t^2 \\ &= 10t^2 - 10t + 5 \\ &= 10 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq t \leq 1$ より $t = -1$ において $|\vec{p}|^2$ は最大となる。そのとき

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= 25 \\ \therefore |\vec{p}| &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5

(2)

(1)より, $t = \frac{1}{2}$ において $|\vec{p}|^2$ は最小となる。このとき

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \frac{5}{2} \\ \therefore |\vec{p}| &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $|\vec{p}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(3)

$t = \frac{1}{2}$ のとき, $\vec{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$, $\vec{OA} = (1, 2)$ となるため

$$\begin{aligned} \triangle OAM &= \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{2} \times 1 \right| \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5}{4}$

2

(1)

$f(x) = x - 1 + 2\sqrt{x-1}$ とおき、接線 l の接点を $(a, f(a))$ とおく。 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

となるから、接線 l の方程式は

$$y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)(x-a) + f(a)$$

$$\therefore y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)x - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。以下この直線が点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るときを考える。

$$0 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{a-1}} - 1 + 2\sqrt{a-1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{a-1} + 1 - 2a - 2\sqrt{a-1} + 4(a-1)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 3 = \sqrt{a-1}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 12a + 9 = a - 1$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 13a + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{4}, 2$$

となるが、ここで $a = \frac{5}{4}$ のとき

$$2a - 3 = -\frac{1}{2} \neq \sqrt{a-1}$$

であるから、これは不適。一方 $a = 2$ のときは

$$2a - 3 = 1 = \sqrt{a-1}$$

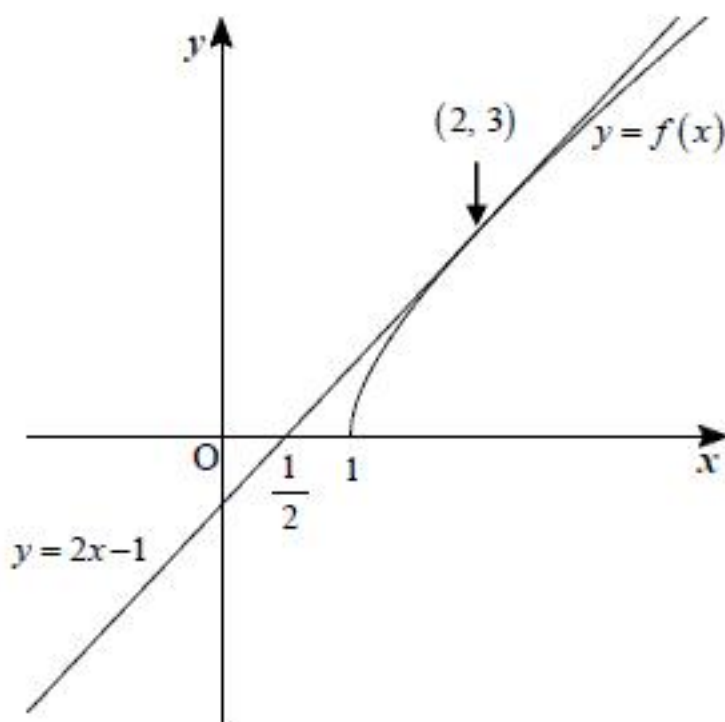
となるから、条件を満たす。よって $a = 2$ を $\textcircled{1}$ に代入することで、求める直線 l の方程式は

$$y = 2x - 1$$

とわかる。

(答) $y = 2x - 1$

(2)



まず、曲線 C と接線 l の上下関係を調べる。 $f(x)$ は $1 \leq x$ でのみ定義されることに加えて

$$\begin{aligned} 2x - 1 - f(x) &= x - 2\sqrt{x-1} \\ &= (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= (\sqrt{x-1} - 1)^2 \end{aligned}$$

であるから、上図のような位置関係になる。よって、求める立体の体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)^2 dx - \pi \int_1^2 (x-1+2\sqrt{x-1})^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (2x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x+2\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{8} - \frac{1}{3} - \frac{8}{5} - 2 \right) \pi \\ &= \frac{17}{30} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{17}{30} \pi$

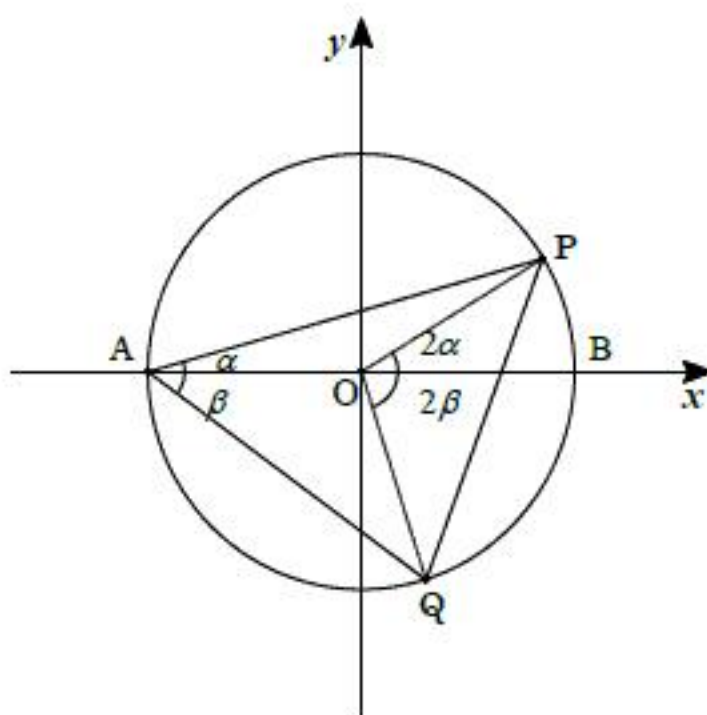
3

(1)

円周角の定理より

$$\angle POB = 2\angle PAB = 2\alpha$$

となる。よって、P の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ となる。同様にして、Q の座標は $(\cos 2\beta, -\sin 2\beta)$ と求まる。



よって直線 PQ の方程式は

$$(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(y - \sin 2\alpha) = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)(x - \cos 2\alpha)$$

となる。(t, 0) を代入すると

$$-\cos 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin 2\alpha = (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)t - \cos 2\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \quad (\because 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin 2\alpha, \sin 2\beta > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sin 2(\alpha + \beta)}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

(2)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。三角関数の和積公式を使うことで、(1)で求めた式は

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin 2\alpha + \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで①より

$$-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

となる。したがって、t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1$$

(1)

A_n 中の基石の数は $n \times 3 = 3n$ 個である。また A_n において右下の基石は $2n+1$ 番目にあるから、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 2n + 1 \\ &= \frac{3(n-1)n}{2} + 2n + 1 \\ &= \frac{3n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$a_n = \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3n^2 + n + 2}{2}$$

(2)

A_n において 1 番上の基石の番号を b_n とする。(1)と同様に考えれば、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} 3k + 1 \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ においても成り立つ。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n} \{b_n + (k-1)\} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} \cdot 3n + \frac{3n(3n+1)}{2} - 3n \\ &= \frac{9n^3 + 3n}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{9n^3 + 3n}{2}$$

(3)

(2)より、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k \left(S_k - \frac{3}{2} k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{9}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^4 \\ &= \int_0^1 \frac{9}{2} x^4 dx \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{10}$$

5

(1)

点 P, Q の座標はそれぞれ $(0, 1-t)$, $(2\sqrt{2}t, 0)$ となるから、内分点の公式を利用することにより、点 R の座標は

$$(2\sqrt{2}t^2, (1-t)^2)$$

と求まる。よって点 R の軌跡 C は

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}t^2 \\ y = (1-t)^2 \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} x = 2\sqrt{2}t^2 \\ y = (1-t)^2 \end{cases}$$

(2)

点 R と原点 O の距離を d とおくと

$$\begin{aligned} d^2 &= (2\sqrt{2}t^2)^2 + \{(1-t)^2\}^2 \\ &= 8t^4 + (1-t)^4 \\ &= 9t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \end{aligned}$$

となる。 $f(t) = 9t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= 36t^3 - 12t^2 + 12t - 4 \\ &= 4(3t-1)(3t^2+1) \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{8}{27}$	$\nearrow$	

したがって d^2 の最小値は $\frac{8}{27}$ となるから、求める d の最小値は $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ となる。

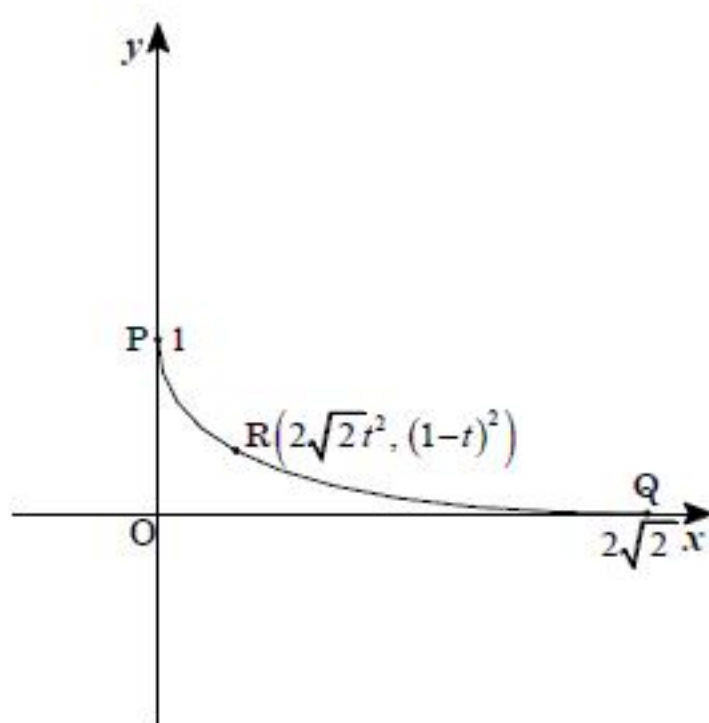
$$(答) \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

(3)

(1)より C は

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}t^2 \\ y = (1-t)^2 \end{cases}$$

と媒介変数表示されるから、 $0 \leq t \leq 1$ において x 座標は狭義単調増加し、 y 座標は狭義単調減少する。また、点 R は $t=0$ において点 P と重なり、 $t=1$ において点 Q と重なる。さらに問題文の条件から、点 R は常に線分 PQ の下側にあることがわかるから、曲線 C は以下の図のようになる。



ここで $y_1 = (1-t)^2$ とおくと

$$S = 2\sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{2} - \int_0^{2\sqrt{2}} y_1 dx$$

となる。ここで $x = 2\sqrt{2}t^2$ であるから $dx = 4\sqrt{2}t dt$ となり、 x と t の対応関係は

x	0	$\rightarrow$	$2\sqrt{2}$
t	0	$\rightarrow$	1

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{2}} y_1 dx &= \int_0^1 4\sqrt{2}t(1-t)^2 dt \\ &= 4\sqrt{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。

$$(答) S = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$