

1

(1)

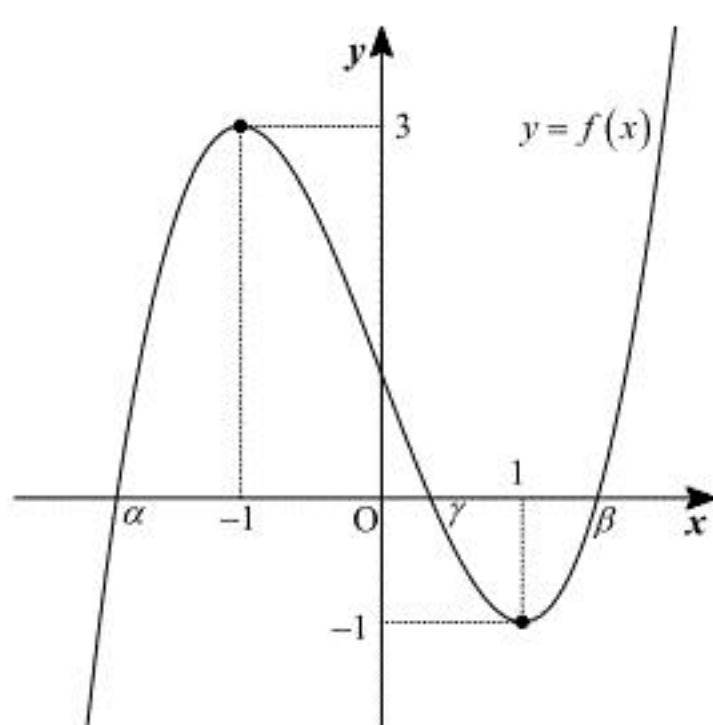
関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおく。これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

となるから、この関数の増減表は以下の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	-1	$\searrow$

よって、関数 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より曲線 $y = f(x)$ と x 軸は異なる3点で交わることがわかるから、3次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ は相異なる3つの実数解をもつことが示された。

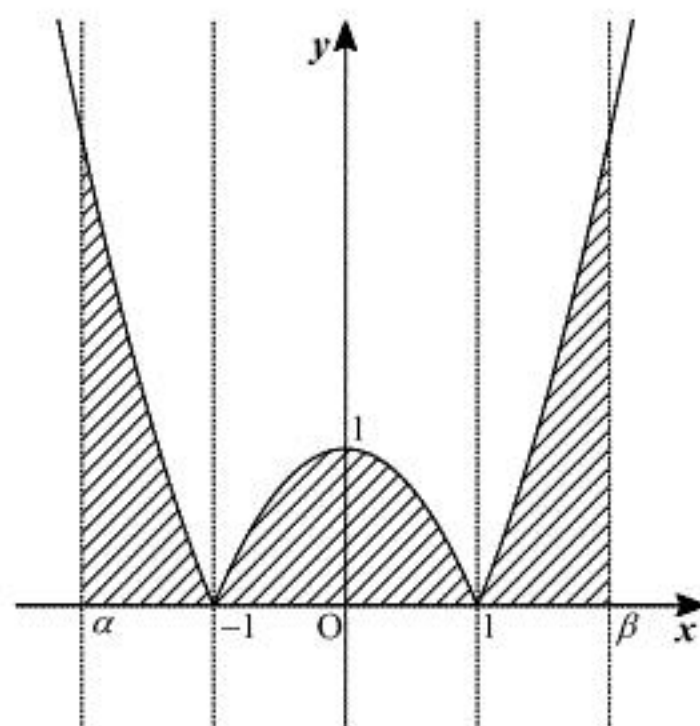
(証明終)

(2)

3次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解のうち、最小のものを α 、最大のものを β とする。すると(1)における考察より

$$\alpha < -1, 1 < \beta$$

を満たすから、求める定積分の値は下図の斜線部に等しくなる。



よって、与えられた定積分の値は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |x^2 - 1| dx &= \int_{\alpha}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx + \int_1^{\beta} (x^2 - 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{\alpha}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^{\beta} \\ &= \left\{ \frac{2}{3} - \left(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha \right) \right\} - \left\{ \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{2}{3} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{\beta^3}{3} - \beta \right) - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - (\beta - \alpha) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 α, β は3次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \\ \beta^3 - 3\beta + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 3\alpha - 1 \\ \beta^3 = 3\beta - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすため、①の値は

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} + \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - (\beta - \alpha) &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\{(3\beta - 1) - (3\alpha - 1)\} - (\beta - \alpha) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{8}{3}$

2

(1)

等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公比を r とすると、その一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表せる。よって、 $k=4, T_1=5, T_2=80$ という条件から、次の関係式が成り立つ。

$$T_1 = 5$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$$

$$\Leftrightarrow a + ar + ar^2 + ar^3 = 5$$

$$\therefore a(1+r+r^2+r^3) = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$T_2 = 80$$

$$\Leftrightarrow a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 80$$

$$\Leftrightarrow ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 = 80$$

$$\therefore ar^4(1+r+r^2+r^3) = 80 \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって、①と②より

$$5 \times r^4 = 80$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 16$$

$$\therefore r = \pm 2$$

が得られる。ここで

$$r=2 \text{ のとき, ①より } a = \frac{1}{3} \text{ である}$$

$$r=-2 \text{ のとき, ①より } a = -1 \text{ である}$$

ことがわかるから、求める数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3} \quad \text{または} \quad a_n = -(-2)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2^{n-1}}{3} \quad \text{または} \quad a_n = -(-2)^{n-1}$$

(2)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とすると、その一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表せる。このとき、 $(m-1)k+1$ 項から mk 項までの和 T_m は

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{n=(m-1)k+1}^{mk} a_n \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_{(m-1)k+1} + a_{mk}) \cdot k \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + \{(m-1)k+1-1\}d + a + (mk-1)d) \cdot k \\ &= \left(a + \frac{k^2d}{2} - \frac{kd}{2} \right) + (m-1)k^2d \end{aligned}$$

と表せるから、数列 $\{T_m\}$ は初項 $a + \frac{k^2d}{2} - \frac{kd}{2}$ 、公差 k^2d の等差数列であることが示された。

(証明終)