

(1)

命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であることを示す。条件 q が成立するとき

$$\begin{aligned} [b_1 b_2 b_3 26] &= 26[a_1 a_2 a_3] \\ \Leftrightarrow b_1 \times 10000 + b_2 \times 1000 + b_3 \times 100 + 26 &= 26(a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3) \\ \Leftrightarrow 100(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 26(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 13(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50[b_1 b_2 b_3] &= 13([a_1 a_2 a_3] - 1) \end{aligned}$$

となる。ここで 50 と 13 は互いに素であるから、 $[a_1 a_2 a_3] - 1$ は 50 の倍数であることがわかる。したがって、条件 p が成立することが示された。

(答) 真, 証明: 前述

(2)

(1)より、条件 q が成立するためには条件 p が成立することが必要であることがわかる。以下、条件 p を満たす各 $[a_1 a_2 a_3]$ について、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ が存在するか否かを順次確認していく。

[1] $[a_1 a_2 a_3] = 151, 251, 351$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 3926, 6526, 9126$$

となるから、これらは 4 桁の自然数であり、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在しない。

[2] $[a_1 a_2 a_3] = 451, 551, 651, 751, 851, 951$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 11726, 14326, 16926, 19526, 22126, 24726$$

となるから、それぞれ条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在する。

以上[1], [2]より、条件 q を満たす組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は全部で 6 組あることがわかる。

(答) 6 組

(3)

命題「 $q \Rightarrow r$ 」が偽であることを示す。(2)における考察より、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3]$ に

$$[b_1 b_2 b_3] = 169 = 13^2$$

があるが、これは条件 r を満たさない。よって、組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$ は命題「 $q \Rightarrow r$ 」を満たさない反例である。

(答) 偽, 反例: $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$

2

(1)

まず, 3 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{z}$ とおくと, 題意より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \vec{x} + \frac{3}{4}\vec{z} \\ \overrightarrow{AQ} = \vec{y} + \frac{3}{4}\vec{z} \\ \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{x} + \vec{y} + \frac{3}{2}\vec{z} \end{cases}$$

と表せる。したがって,

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AC} = \left(\vec{x} + \vec{y} + \frac{3}{2}\vec{z} \right) - (\vec{x} + \vec{y}) = \frac{3}{2}\vec{z}$$

と表せるから, $GR = \frac{1}{2}$ であることがわかる。ここで $PF = \frac{1}{4}$ であることから, 相似な 2 つの三角形 $\triangle PFS$ と $\triangle RGS$ の相似比は 1:2 であることがわかる。よって

$$GS (= GT) = \frac{2}{3}$$

が得られるから, 四面体 SGTR の体積は

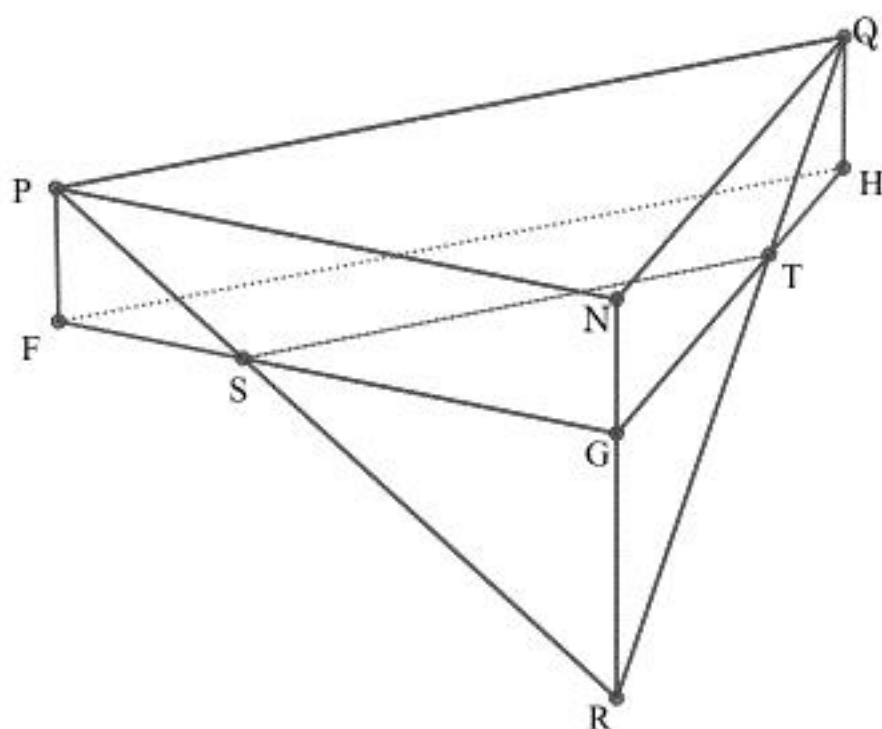
$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot GS \cdot GT \cdot GR &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{27}$

(2)

求める図形の体積を V とする。



上図のように, $NG = \frac{1}{4}$ となるように点 N を直線 CG 上にとる。このとき, 求める図形の体積

V は

$$V = \text{三角柱 } PNQ \cdot FGH - (\text{四面体 } PNQR - \text{四面体 } SGTR)$$

である。ここで, 各立体の体積は

$$\text{三角柱 } PNQ \cdot FGH = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{四面体 } PNQR = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\text{四面体 } SGTR = \frac{1}{27}$$

であるから, 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27} \right) \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $\frac{1}{27}$

(1)

半径1の円の周の長さは 2π であるから、動点Pは1秒間に $\frac{2\pi}{T}$ 進むことがわかる。よって T 秒

後の弧PQの長さは $\frac{2\pi}{T}t$ であるから、その弧に対する中心角も $\frac{2\pi}{T}t$ であるため、動点P(x, y)

の座標は

$$(x, y) = \left(\cos \frac{2\pi}{T}t, \sin \frac{2\pi}{T}t \right)$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad x = \cos \frac{2\pi}{T}t, \quad y = \sin \frac{2\pi}{T}t$$

(2)

(1)の結果より z を t で表すと、三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned} z &= 2x^2 + xy + y^2 \\ &= 2\cos^2 \frac{2\pi}{T}t + \cos \frac{2\pi}{T}t \sin \frac{2\pi}{T}t + \sin^2 \frac{2\pi}{T}t \\ &= 2 \cdot \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{T}t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T}t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{T}t + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{4\pi}{T}t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{4\pi}{T}t \right) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 t の動く範囲は $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ であることから、 $\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}$ の動く範囲は

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

である。したがって、

$$\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{T}{16} \text{ のとき、} z \text{ は最大値 } \frac{3+\sqrt{2}}{2} \text{ をとる}$$

$$\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow t = \frac{T}{4} \text{ のとき、} z \text{ は最小値} 1 \text{ をとる}$$

ということがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{T}{16} \text{ のとき最大値 } \frac{3+\sqrt{2}}{2} \text{ をとり、} t = \frac{T}{4} \text{ のとき最小値} 1 \text{ をとる}$$

4

(1)

関数 $y = \log x$ を微分すると

$$y' = \frac{1}{x}$$

となるから、点 $P(1, 0)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= x-1 \end{aligned}$$

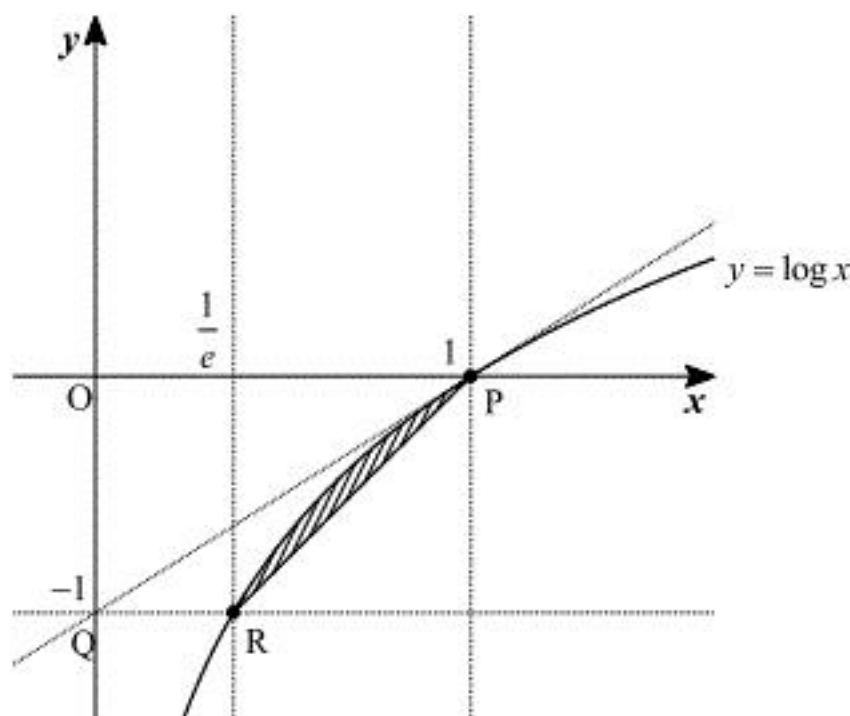
である。よって点 Q の座標は $Q(0, -1)$ であるから、点 R の y 座標も -1 である。したがって、曲線 $y = \log x$ 上の点 R の x 座標は

$$\begin{aligned} -1 &= \log x \\ \therefore x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \ R\left(\frac{1}{e}, -1\right)$$

(2)



上図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積が、求める体積 V である。ここで、直線 PR の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1-\frac{1}{e}}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{e}{e-1}(x-1) \end{aligned}$$

である。よって、上図より、求める体積 V は

$$V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ \frac{e}{e-1}(x-1) \right\}^2 dx - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log x)^2 dx \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。まず、①の右辺の第一項の積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ \frac{e}{e-1}(x-1) \right\}^2 dx &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \int_{\frac{1}{e}}^1 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{e} - 1 \right)^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、続いて右辺の第二項の積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log x)^2 dx &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 2 \log x dx \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - 2\pi \left\{ \left[x \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \right\} \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \pi \left\{ (0 - 0 + 2) - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} \right) \right\} \\ &= \pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

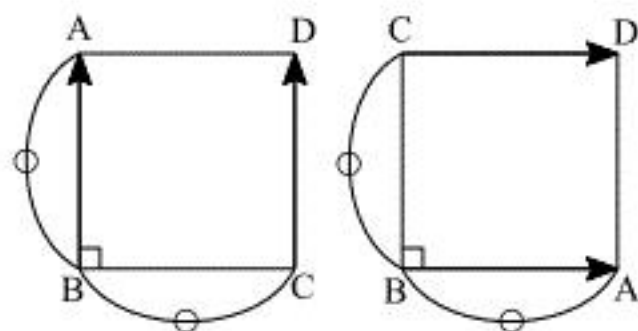
となる。したがって①、②、③より、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) - \pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \\ &= \left(\frac{14-5e}{3e} \right) \pi \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \ V = \left(\frac{14-5e}{3e} \right) \pi$$

4点A, B, C, Dを頂点とする四角形が $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ となる正方形であるとき、以下の図のどちらかのようにになる。



上の図のどちらであっても、このような正方形をなすための条件は

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

である。題意より、4点A, B, C, Dの座標は $A(a, 2)$, $B(b, -4)$, $C(-3, c)$, $D(5, d)$ とおけるから、このとき、満たすべき条件は

$$\begin{cases} a-b=8, 6=d-c & \dots\dots ① \\ (a-b)(-3-b)+6(c+4)=0 & \dots\dots ② \\ (a-b)^2+6^2=(-3-b)^2+(c+4)^2 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

と表せる。ここで①より a, d を消去すると、②、③は

$$\begin{cases} 4(-3-b)+3(c+4)=0 & \dots\dots ④ \\ (-3-b)^2+(c+4)^2=100 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

となるから、④、⑤より

$$(-3-b, c+4) = (6, -8), (-6, 8) \Leftrightarrow (b, c) = (-9, -12), (3, 4)$$

であることがわかる。これを①に代入することで、

$$(a, b, c, d) = (-1, -9, -12, -6), (11, 3, 4, 10)$$

と求まる。

(答) $A(-1, 2)$, $B(-9, -4)$, $C(-3, -12)$, $D(5, -6)$ または $A(11, 2)$, $B(3, -4)$, $C(-3, 4)$, $D(5, 10)$