

(1)

命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であることを示す。条件 q が成立するとき

$$\begin{aligned} [b_1 b_2 b_3 26] &= 26[a_1 a_2 a_3] \\ \Leftrightarrow b_1 \times 10000 + b_2 \times 1000 + b_3 \times 100 + 26 &= 26(a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3) \\ \Leftrightarrow 100(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 26(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 13(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50[b_1 b_2 b_3] &= 13([a_1 a_2 a_3] - 1) \end{aligned}$$

となる。ここで 50 と 13 は互いに素であるから、 $[a_1 a_2 a_3] - 1$ は 50 の倍数であることがわかる。したがって、条件 p が成立することが示された。

(答) 真, 証明: 前述

(2)

(1)より、条件 q が成立するためには条件 p が成立することが必要であることがわかる。以下、条件 p を満たす各 $[a_1 a_2 a_3]$ について、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ が存在するか否かを順次確認していく。

[1] $[a_1 a_2 a_3] = 151, 251, 351$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 3926, 6526, 9126$$

となるから、これらは 4 桁の自然数であり、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在しない。

[2] $[a_1 a_2 a_3] = 451, 551, 651, 751, 851, 951$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 11726, 14326, 16926, 19526, 22126, 24726$$

となるから、それぞれ条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在する。

以上[1], [2]より、条件 q を満たす組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は全部で 6 組あることがわかる。

(答) 6 組

(3)

命題「 $q \Rightarrow r$ 」が偽であることを示す。(2)における考察より、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3]$ に

$$[b_1 b_2 b_3] = 169 = 13^2$$

があるが、これは条件 r を満たさない。よって、組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$ は命題「 $q \Rightarrow r$ 」を満たさない反例である。

(答) 偽, 反例: $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$

2

(1)

点 P_1 の x 座標を x_1 、点 P_2 の x 座標を x_2 とする。点 P_1 は放物線 $y = ax^2 + 1$ と直線 $y = b$ の交点であるから、

$$\begin{aligned} ax_1^2 + 1 &= b \\ \Leftrightarrow x_1 &= \sqrt{\frac{b-1}{a}} \quad (\because a > 0, b > 1, x_1 > 0) \end{aligned}$$

と求まり、点 P_2 は放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = b$ の交点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2^2 &= b \\ \Leftrightarrow x_2 &= \sqrt{2b} \quad (\because b > 1, x_2 > 0) \end{aligned}$$

と求まる。したがって、点 P_1 と点 P_2 の距離 d は

$$d = \left| \sqrt{\frac{b-1}{a}} - \sqrt{2b} \right| \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。ここで $a = \frac{1}{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より

$$d = \left| \sqrt{2(b-1)} - \sqrt{2b} \right|$$

であるから、求める条件は

$$\begin{aligned} d &\leq 1 \\ \Leftrightarrow d^2 &\leq 1 \quad (\because d \geq 0) \\ \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{2(b-1)} - \sqrt{2b} \right\}^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 2b + 2(b-1) - 2 \cdot \sqrt{2b} \cdot \sqrt{2(b-1)} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 4b - 3 &\leq 4\sqrt{b(b-1)} \\ \Leftrightarrow 16b^2 - 24b + 9 &\leq 16b(b-1) \quad (\because 4b - 3 > 0) \\ \Leftrightarrow b &\geq \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

(答) $b \geq \frac{9}{8}$

(2)

$a \neq \frac{1}{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より求める条件は

$$\begin{aligned} d &\leq 1 \\ \Leftrightarrow d^2 &\leq 1 \quad (\because d \geq 0) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b-1}{a}} - \sqrt{2b} \right)^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{b-1}{a} + 2b - 2 \cdot \sqrt{\frac{b-1}{a}} \cdot \sqrt{2b} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (b-1) + a(2b-1) &\leq 2\sqrt{2ab(b-1)} \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow \{(b-1) + a(2b-1)\}^2 &\leq 8ab(b-1) \quad (\because b-1 > 0 \text{ かつ } 2b-1 > 0 \text{ かつ } a > 0) \\ \Leftrightarrow (2a-1)^2 b^2 - 2(2a^2 - a + 1)b + (a+1)^2 &\leq 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と変形でき、 $a \neq \frac{1}{2}$ より $\textcircled{2}$ は b についての 2 次不等式として解くことができる。 $\textcircled{2}$ の左辺を

$f(b)$ とおくと、2 次方程式 $f(b) = 0$ の判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (2a^2 - a + 1)^2 - (2a-1)^2 (a+1)^2 \\ &= \{(2a^2 - a + 1) + (2a-1)(a+1)\} \{(2a^2 - a + 1) - (2a-1)(a+1)\} \\ &= 8a^2(1-a) \end{aligned}$$

であるから、以下 a と 1 の大小関係で場合分けして b に関する条件を求める。

[1] $a > 1$ のとき

$(2a-1)^2 > 0$ であり $D < 0$ となるため、2 次不等式 $\textcircled{2}$ を満たす b は存在しない。

[2] $a \leq 1$ のとき

$D \geq 0$ となる。ここで、放物線 $y = f(b)$ の軸は

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a^2 - a + 1}{(2a-1)^2} \\ &= \frac{(2a-1)^2 - 2a^2 + 3a}{(2a-1)^2} \\ &= 1 + \frac{a(3-2a)}{(2a-1)^2} \\ &> 1 \quad (\because a > 0 \text{ かつ } 3-2a > 0) \end{aligned}$$

となり、 $f(1) = a^2 > 1$ であるから、2 次方程式 $f(b) = 0$ の解は $b > 1$ を満たす。よって、 $b > 1$ を満たす 2 次不等式 $\textcircled{2}$ の解は

$$\begin{aligned} \frac{(2a^2 - a + 1) - \sqrt{D}}{(2a-1)^2} &\leq b \leq \frac{(2a^2 - a + 1) + \sqrt{D}}{(2a-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{(2a^2 - a + 1) - 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} &\leq b \leq \frac{(2a^2 - a + 1) + 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、求める b の値の範囲は

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \text{ のとき, 条件を満たす } b \text{ は存在しない} \\ 0 < a < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a \leq 1 \text{ のとき,} \\ \frac{(2a^2 - a + 1) - 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \leq b \leq \frac{(2a^2 - a + 1) + 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \end{array} \right.$$

であることがわかる。

$$\text{(答)} \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \text{ のとき, 条件を満たす } b \text{ は存在しない} \\ 0 < a < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a \leq 1 \text{ のとき,} \\ \frac{(2a^2 - a + 1) - 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \leq b \leq \frac{(2a^2 - a + 1) + 2a\sqrt{2(1-a)}}{(2a-1)^2} \end{array} \right.$$

$\log_{5832} n$ が有理数であり、かつ $\frac{1}{2} < \log_{5832} n < 1$ を満たすとき、自然数 n を求める。まず、互いに素な自然数 p, q を用いて

$$\log_{5832} n = \frac{q}{p} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおくことができ、このとき与えられた不等式は

$$\frac{1}{2} < \frac{q}{p} < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで $5832 = 2^3 3^6$ より、①、②をそれぞれ変形すると

$$\begin{cases} n^p = 2^{3q} 3^{6q} & \dots \textcircled{3} \\ p < 2q < 2p \ (\because p > 0) & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

となる。さて、③より n は 2, 3 以外の素因数をもたないことがわかるから

$$n = 2^a 3^b \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表すことができ、このとき③は

$$2^{ap} 3^{aq} = 2^{3q} 3^{6q} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。よって、③かつ④は

$$\begin{cases} ap = 3q \\ bp = 6q \\ p < 2q < 2p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a & \dots \textcircled{6} \\ ap = 3q & \dots \textcircled{7} \\ p < 2q < 2p & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

と変形される。ここで⑦、④より、 a について

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}p &< ap = 3q < 3p \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} &< a < 3 \ (\because p > 0) \end{aligned}$$

が必要であるため、 $a = 2$ となるしかなく、このとき⑥より $b = 4$ であるから

$$n = 2^2 3^4 = 324$$

と候補が限られ、逆にこのとき⑦より $2p = 3q$ であるから

$$\log_{5832} n = \frac{q}{p} = \frac{2}{3}$$

となるため、条件を満たすことがわかる。

4

(1)

座標平面上の曲線 C は媒介変数 t ($t \geq 0$) を用いて

$$x = t^2 + 2t + \log(t+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = t^2 + 2t - \log(t+1) \quad \dots \textcircled{2}$$

と表される。①, ②を t で微分することにより

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2t + 2 + \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{2(t+1)^2 + 1}{t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2t + 2 - \frac{1}{t+1} \\ &= \frac{2(t+1)^2 - 1}{t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2(t+1)^2 - 1}{2(t+1)^2 + 1} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が得られるから、曲線 C 上の点 $P(a, b)$ における接線の傾きが $\frac{2e-1}{2e+1}$ となる条件は

$$\begin{cases} a = t_0^2 + 2t_0 + \log(t_0 + 1) \end{cases} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{cases} b = t_0^2 + 2t_0 - \log(t_0 + 1) \end{cases} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\begin{cases} \frac{2(t_0+1)^2 - 1}{2(t_0+1)^2 + 1} = \frac{2e-1}{2e+1} \end{cases} \quad \dots \textcircled{6}$$

を満たす実数 t_0 ($t_0 \geq 0$) が存在することである。⑥より

$$\begin{aligned} \frac{2(t_0+1)^2 - 1}{2(t_0+1)^2 + 1} &= \frac{2e-1}{2e+1} \\ \Leftrightarrow \{2(t_0+1)^2 - 1\}(2e+1) &= \{2(t_0+1)^2 + 1\}(2e-1) \\ \Leftrightarrow (t_0+1)^2 &= e \\ \Leftrightarrow t_0 &= -1 + \sqrt{e} \quad (\because t_0 \geq 0) \end{aligned}$$

であることがわかるから、これを④, ⑤に代入することで

$$\begin{cases} a = (t_0+1)^2 - 1 + \log(t_0+1) = e - \frac{1}{2} \\ b = (t_0+1)^2 - 1 - \log(t_0+1) = e - \frac{3}{2} \end{cases}$$

と求まる。

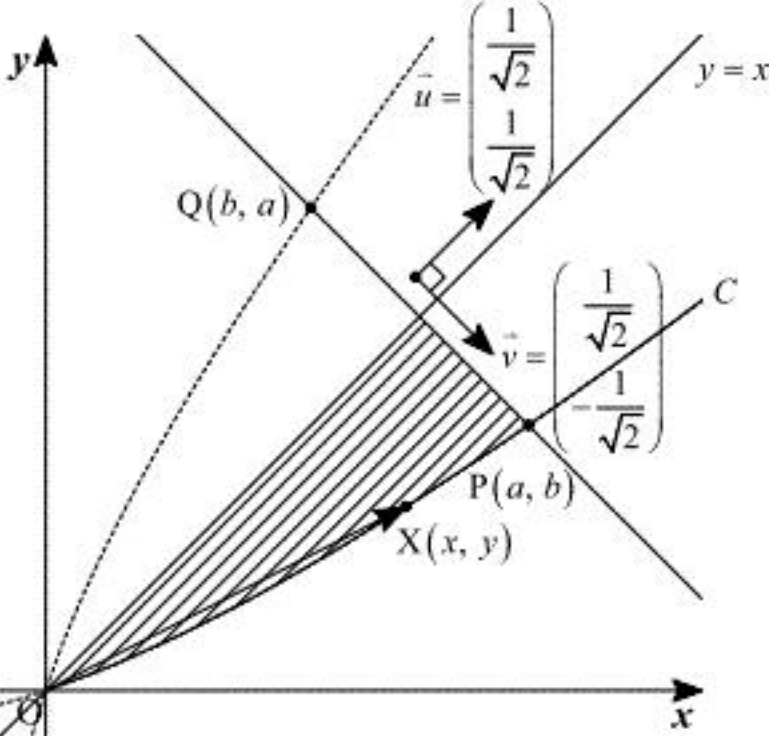
$$(\text{答}) \quad a = e - \frac{1}{2}, b = e - \frac{3}{2}$$

(2)

(1)より、 $t \geq 0$ のとき $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{dy}{dt} > 0$ である。また $t = 0$ のとき $(x, y) = (0, 0)$ であり、 $t > 0$ のとき

$$x(t^2 + 2t + \log(t+1)) > y(t^2 + 2t - \log(t+1))$$

を満たすから、曲線 C 、直線 $y = x$ 、直線 PQ は以下の図のようになる。



上図の斜線部を直線 $y = x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積が求める体積である。直線 $y = x$ に平行なベクトルな単位ベクトル、それに垂直な単位ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とおき、各ベクトルの向きを正の方向とする座標軸を u 軸、 v 軸とおく。また、 $\overrightarrow{OX} = (x, y)$ とおくと、曲線 C は uv 平面において

$$\begin{cases} u = \overrightarrow{OX} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \sqrt{2}(t^2 + 2t) \\ v = \overrightarrow{OX} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = \sqrt{2}\log(t+1) \end{cases}$$

と媒介変数表示できるから、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=t_0} \pi v^2 du &= \int_{t=0}^{t=t_0} \pi v^2 \cdot \frac{du}{dt} dt \\ &= \int_0^{t_0} \pi \left\{ \sqrt{2} \log(t+1) \right\}^2 \left\{ \sqrt{2} (2t+2) \right\} dt \\ &= 4\sqrt{2}\pi \int_0^{-1+\sqrt{e}} (t+1) \left\{ \log(t+1) \right\}^2 dt \\ &= 4\sqrt{2}\pi \int_1^{\sqrt{e}} s (\log s)^2 ds \end{aligned}$$

と立式できる。ここで、不定積分 $\int s (\log s)^2 ds$ を計算すると

$$\begin{aligned} \int s (\log s)^2 ds &= \frac{s^2}{2} (\log s)^2 - \int \frac{s^2}{2} \cdot 2 \log s \cdot \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{s^2}{2} (\log s)^2 - \left(\frac{s^2}{2} \log s - \int \frac{s^2}{2} \cdot \frac{1}{s} ds \right) \\ &= \frac{s^2}{2} (\log s)^2 - \frac{s^2}{2} \log s + \frac{s^2}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

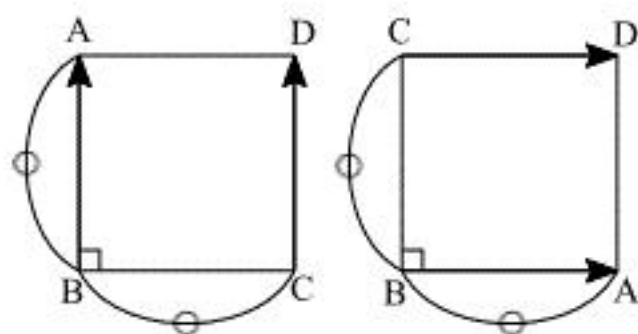
となるから、求める立体の体積は

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2}\pi \int_1^{\sqrt{e}} s (\log s)^2 ds &= 4\sqrt{2}\pi \left[\frac{s^2}{2} (\log s)^2 - \frac{s^2}{2} \log s + \frac{s^2}{4} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= 4\sqrt{2}\pi \left\{ \left(\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e}{4} \right) - \left(0 - 0 + \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (e-2) \pi \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (e-2) \pi$$

4点A, B, C, Dを頂点とする四角形が $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ となる正方形であるとき、以下の図のどちらかのようになる。



上の図のどちらであっても、このような正方形をなすための条件は

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

である。題意より、4点A, B, C, Dの座標は $A(a, 2)$, $B(b, -4)$, $C(-3, c)$, $D(5, d)$ とおけるから、このとき、満たすべき条件は

$$\begin{cases} a - b = 8, 6 = d - c & \dots\dots ① \\ (a - b)(-3 - b) + 6(c + 4) = 0 & \dots\dots ② \\ (a - b)^2 + 6^2 = (-3 - b)^2 + (c + 4)^2 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

と表せる。ここで①より a, d を消去すると、②、③は

$$\begin{cases} 4(-3 - b) + 3(c + 4) = 0 & \dots\dots ④ \\ (-3 - b)^2 + (c + 4)^2 = 100 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

となるから、④、⑤より

$$(-3 - b, c + 4) = (6, -8), (-6, 8) \Leftrightarrow (b, c) = (-9, -12), (3, 4)$$

であることがわかる。これを①に代入することで、

$$(a, b, c, d) = (-1, -9, -12, -6), (11, 3, 4, 10)$$

と求まる。

(答) $A(-1, 2)$, $B(-9, -4)$, $C(-3, -12)$, $D(5, -6)$ または $A(11, 2)$, $B(3, -4)$, $C(-3, 4)$, $D(5, 10)$