

1

(1)

命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であることを示す。条件 q が成立するとき

$$\begin{aligned} [b_1 b_2 b_3 26] &= 26[a_1 a_2 a_3] \\ \Leftrightarrow b_1 \times 10000 + b_2 \times 1000 + b_3 \times 100 + 26 &= 26(a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3) \\ \Leftrightarrow 100(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 26(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50(100b_1 + 10b_2 + b_3) &= 13(100a_1 + 10a_2 + a_3 - 1) \\ \Leftrightarrow 50[b_1 b_2 b_3] &= 13([a_1 a_2 a_3] - 1) \end{aligned}$$

となる。ここで 50 と 13 は互いに素であるから、 $[a_1 a_2 a_3] - 1$ は 50 の倍数であることがわかる。したがって、条件 p が成立することが示された。

(答) 真, 証明: 前述

(2)

(1)より、条件 q が成立するためには条件 p が成立することが必要であることがわかる。以下、条件 p を満たす各 $[a_1 a_2 a_3]$ について、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ が存在するか否かを順次確認していく。

[1] $[a_1 a_2 a_3] = 151, 251, 351$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 3926, 6526, 9126$$

となるから、これらは 4 桁の自然数であり、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在しない。

[2] $[a_1 a_2 a_3] = 451, 551, 651, 751, 851, 951$ のとき

このとき

$$26[a_1 a_2 a_3] = 11726, 14326, 16926, 19526, 22126, 24726$$

となるから、それぞれ条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3 26]$ は存在する。

以上[1], [2]より、条件 q を満たす組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は全部で 6 組あることがわかる。

(答) 6 組

(3)

命題「 $q \Rightarrow r$ 」が偽であることを示す。(2)における考察より、条件 q を満たす $[b_1 b_2 b_3]$ に

$$[b_1 b_2 b_3] = 169 = 13^2$$

があるが、これは条件 r を満たさない。よって、組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$ は命題「 $q \Rightarrow r$ 」を満たさない反例である。

(答) 偽, 反例: $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (6, 5, 1, 1, 6, 9)$

放物線 $y=3x^2-px+1$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{4}{27}$ であるとき、この放物線と x 軸は異なる 2 点で交わるから、それらの交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおく。このとき

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{(-p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{3} = \frac{\sqrt{p^2 - 12}}{3}$$

が成立することに注意すると、題意で与えられた条件から

$$\int_{\alpha}^{\beta} -(3x^2 - px + 1) dx = \frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} -3(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{p^2 - 12}}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 12} = 2$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow p = 4 \quad (\because p > 0)$$

が得られる。したがって、求める p の値は 4 であることがわかる。

(答) $p = 4$

(1)

半径1の円の周の長さは 2π であるから、動点Pは1秒間に $\frac{2\pi}{T}$ 進むことがわかる。よって T 秒

後の弧PQの長さは $\frac{2\pi}{T}t$ であるから、その弧に対する中心角も $\frac{2\pi}{T}t$ であるため、動点P(x, y)

の座標は

$$(x, y) = \left(\cos \frac{2\pi}{T}t, \sin \frac{2\pi}{T}t \right)$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad x = \cos \frac{2\pi}{T}t, y = \sin \frac{2\pi}{T}t$$

(2)

(1)の結果より z を t で表すと、三角関数の倍角の公式より

$$\begin{aligned} z &= 2x^2 + xy + y^2 \\ &= 2\cos^2 \frac{2\pi}{T}t + \cos \frac{2\pi}{T}t \sin \frac{2\pi}{T}t + \sin^2 \frac{2\pi}{T}t \\ &= 2 \cdot \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{T}t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T}t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{T}t + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{4\pi}{T}t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{4\pi}{T}t \right) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 t の動く範囲は $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ であることから、 $\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}$ の動く範囲は

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$$

である。したがって、

$$\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{T}{16} \text{ のとき, } z \text{ は最大値 } \frac{3+\sqrt{2}}{2} \text{ をとる}$$

$$\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{4} \text{ のとき, } z \text{ は最小値 } 1 \text{ をとる}$$

ということがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{T}{16} \text{ のとき最大値 } \frac{3+\sqrt{2}}{2} \text{ をとり, } t = \frac{T}{4} \text{ のとき最小値 } 1 \text{ をとる}$$

(1)

関数 $y = \log x$ を微分すると

$$y' = \frac{1}{x}$$

となるから、点 $P(1, 0)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{1}(x-1) \\ \Leftrightarrow y = x-1$$

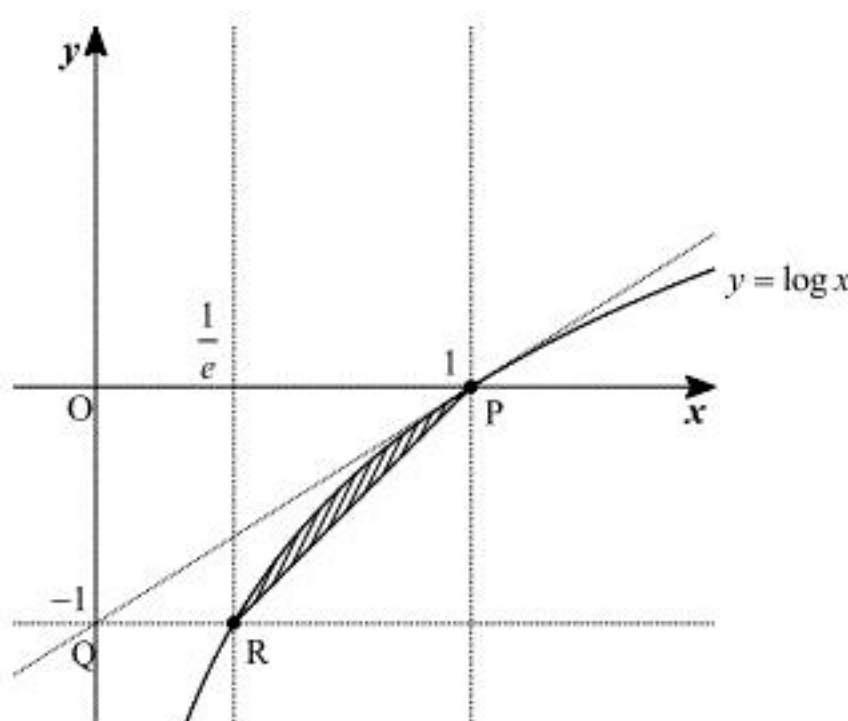
である。よって点 Q の座標は $Q(0, -1)$ であるから、点 R の y 座標も -1 である。したがって、曲線 $y = \log x$ 上の点 R の x 座標は

$$-1 = \log x \\ \therefore x = \frac{1}{e}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \ R\left(\frac{1}{e}, -1\right)$$

(2)

上図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積が、求める体積 V である。ここで、直線 PR の方程式は

$$y = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}(x-1) \\ \Leftrightarrow y = \frac{e}{e-1}(x-1)$$

である。よって、上図より、求める体積 V は

$$V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ \frac{e}{e-1}(x-1) \right\}^2 dx - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log x)^2 dx \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。まず、①の右辺の第一項の積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left\{ \frac{e}{e-1}(x-1) \right\}^2 dx &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \int_{\frac{1}{e}}^1 (x-1)^2 dx \\ &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{\pi e^2}{(e-1)^2} \left\{ \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{e} - 1 \right)^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、続いて右辺の第二項の積分を計算すると、

$$\begin{aligned} \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log x)^2 dx &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 2 \log x dx \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 - 2\pi \left\{ \left[x \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \right\} \\ &= \pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \pi \left\{ (0 - 0 + 2) - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} \right) \right\} \\ &= \pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

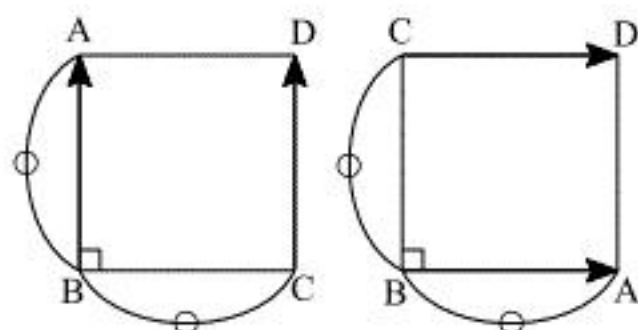
となる。したがって①、②、③より、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e} \right) - \pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \\ &= \left(\frac{14-5e}{3e} \right) \pi \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \ V = \left(\frac{14-5e}{3e} \right) \pi$$

4点A, B, C, Dを頂点とする四角形が $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ となる正方形であるとき、以下の図のどちらかのようにになる。



上の図のどちらであっても、このような正方形をなすための条件は

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

である。題意より、4点A, B, C, Dの座標は $A(a, 2)$, $B(b, -4)$, $C(-3, c)$, $D(5, d)$ とおけるから、このとき、満たすべき条件は

$$\begin{cases} a-b=8, 6=d-c & \dots \textcircled{1} \\ (a-b)(-3-b)+6(c+4)=0 & \dots \textcircled{2} \\ (a-b)^2+6^2=(-3-b)^2+(c+4)^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

と表せる。ここで①より a, d を消去すると、②、③は

$$\begin{cases} 4(-3-b)+3(c+4)=0 & \dots \textcircled{4} \\ (-3-b)^2+(c+4)^2=100 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

となるから、④、⑤より

$$(-3-b, c+4) = (6, -8), (-6, 8) \Leftrightarrow (b, c) = (-9, -12), (3, 4)$$

であることがわかる。これを①に代入することで、

$$(a, b, c, d) = (-1, -9, -12, -6), (11, 3, 4, 10)$$

と求まる。

(答) $A(-1, 2)$, $B(-9, -4)$, $C(-3, -12)$, $D(5, -6)$ または $A(11, 2)$, $B(3, -4)$, $C(-3, 4)$, $D(5, 10)$