

(1)

$$\begin{aligned}\frac{c+d}{a+b} - \frac{c}{a} &= \frac{a(c+d) - c(a+b)}{a(a+b)} \\ &= \frac{ac+ad-ac-bc}{a(a+b)} \\ &= \frac{ad-bc}{a(a+b)}\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}\frac{c}{a} &< \frac{d}{b} \\ \Leftrightarrow bc &< ad \quad (\because a, b, c, d > 0) \\ \therefore ad - bc &> 0\end{aligned}$$

であり, a, b, c, d は正の数であるから,

$$\begin{aligned}\frac{c+d}{a+b} - \frac{c}{a} &= \frac{ad-bc}{a(a+b)} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c}{a} &< \frac{c+d}{a+b}\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\frac{d}{b} - \frac{c+d}{a+b} &= \frac{d(a+b) - b(c+d)}{b(a+b)} \\ &= \frac{ad+bd-bc-bd}{b(a+b)} \\ &= \frac{ad-bc}{b(a+b)} \\ &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c+d}{a+b} &< \frac{d}{b}\end{aligned}$$

となるから

$$\frac{c}{a} < \frac{c+d}{a+b} < \frac{d}{b}$$

が示された。

(証明終)

(2)

$$\frac{c_n}{a_n} < \frac{d_n}{b_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを, 数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき,

(1)より①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。

漸化式から帰納的に考えると, すべての自然数 n について

$$a_n, b_n, c_n, d_n > 0$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned}\frac{c_k}{a_k} &< \frac{d_k}{b_k} \\ \Leftrightarrow a_k d_k - b_k c_k &> 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\frac{d_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} &= \frac{a_{k+1}d_{k+1} - b_{k+1}c_{k+1}}{a_{k+1}b_{k+1}} \\ &= \frac{(2a_k + b_k)(c_k + 2d_k) - (a_k + 2b_k)(2c_k + d_k)}{(2a_k + b_k)(a_k + 2b_k)} \\ &= \frac{3(a_k d_k - b_k c_k)}{(2a_k + b_k)(a_k + 2b_k)} \\ &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} &< \frac{d_{k+1}}{b_{k+1}}\end{aligned}$$

となる。よって $n=k+1$ のときも①は成り立つ。

以上[1][2]より, すべての自然数 n について①が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

の2式の両辺を足し, 整理すると

$$\begin{aligned}a_{n+1} + b_{n+1} &= 3(a_n + b_n) \\ &= 3^n(a_1 + b_1) \\ &= 3^n(a + b) \\ &= 3^{n+1}\end{aligned}$$

となり, 上式は $n=0$ としても成り立つから,

$$\therefore a_n + b_n = 3^n \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③の2式の両辺を引き, 整理すると

$$\begin{aligned}a_{n+1} - b_{n+1} &= a_n - b_n \\ &= a_1 - b_1 \\ &= a - b \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\therefore a_n - b_n = 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。④, ⑤の両辺を足し, 整理すると

$$\begin{aligned}2a_n &= 3^n + 1 \\ \therefore a_n &= \frac{3^n + 1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$

(1)

仮定より

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 + 2x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{2+2x}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= |-\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 5 - 4x \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{d}| = \sqrt{5-4x}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{c}| = \sqrt{2+2x}, |\vec{d}| = \sqrt{5-4x}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= -|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 1 + x$$

(3)

$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が θ であるから, (2), (3)より

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= 1 + x \\ \Leftrightarrow x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} &= 1 + x \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $-1 < x < 1$ であるから, 上式より

$$\begin{aligned} 0 < x\sqrt{(2+2x)(5-4x)} &= 1 + x < 2 \\ \therefore 0 < x < 1 \end{aligned}$$

がわかる。よって①式を2乗して整理すると

$$\begin{aligned} x^2(2+2x)(5-4x) &= (1+x)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2(5-4x) &= 1+x \quad (\because 1+x \neq 0) \\ \Leftrightarrow -8x^3 + 10x^2 &= 1+x \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 10x^2 + x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(4x+1) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

となる。ここから

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 60^\circ$$

$n, p-m, m+n$ がこの順で等差数列となるから

$$\begin{aligned} n+(m+n) &= 2(p-m) \\ \Leftrightarrow 2p &= 2n+3m \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、 $p-m, n, p+m$ がこの順で等比数列となるから

$$\begin{aligned} n^2 &= (p+m)(p-m) = p^2 - m^2 \\ \Leftrightarrow p^2 &= n^2 + m^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで①の両辺を2乗したものから②の両辺を4倍したものを引くと

$$\begin{aligned} (2n+3m)^2 - 4(n^2 + m^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12nm + 5m^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m(12n+5m) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12n+5m &= 0 \quad (\because m \neq 0) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。①の両辺を6倍すると

$$\begin{aligned} 12p &= 12n+18m \\ \text{となるから、} \textcircled{3} \text{を用いて } n &\text{を消去すると} \\ 12p &= 13m \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。12, 13は互いに素であるから p は13の倍数であるが、 p は素数なので

$$p=13$$

である。また、④式より

$$m=12$$

がわかる。さらに、③式より

$$n=-5$$

がわかる。

(答) $(p, n, m) = (13, -5, 12)$

(1)

楕円の方程式の両辺を x で微分すると

$$2x + \frac{2y}{9} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

となるから、点 P における微分係数は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9\alpha}{\beta} (\because \beta > 0)$$

となる。よって ℓ の方程式は

$$y = -\frac{9\alpha}{\beta}(x - \alpha) + \beta$$

となる。両辺に $\frac{\beta}{9}$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{9}y &= -\alpha(x - \alpha) + \frac{\beta^2}{9} \\ \Leftrightarrow \alpha x + \frac{\beta}{9}y &= \alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} \end{aligned}$$

となるが、点 $P(\alpha, \beta)$ は楕円 C 上の点であるから $\alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} = 1$ を満たすので、 ℓ の方程式は

$$\alpha x + \frac{\beta}{9}y = \alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha x + \frac{\beta}{9}y = 1$$

(2)

(1)より、 Q の x 座標は

$$\begin{aligned} \alpha x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\alpha} (\because \alpha > 0) \end{aligned}$$

となり、 R の y 座標は

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{9}y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{9}{\beta} (\because \beta > 0) \end{aligned}$$

となる。よって線分 QR の長さの2乗は

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{9}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{81}{\beta^2}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \frac{\beta^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{9} &= 1 - \alpha^2 \\ \Leftrightarrow \frac{81}{\beta^2} &= \frac{9}{1 - \alpha^2} \quad (\because \beta > 0 \text{ より } \alpha \neq 1) \end{aligned}$$

となるから、求める値は

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{9}{1 - \alpha^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{9}{1 - \alpha^2}$$

(3)

$\alpha^2 = t$ とおくと、 $\alpha > 0$ から $t > 0$ である。(2)より線分 QR の長さの2乗を $f(t)$ とおくと

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{9}{1-t}$$

となるので

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{t^2} + \frac{9}{(1-t)^2} \\ &= \frac{8t^2 + 2t - 1}{t^2(1-t)^2} \\ &= \frac{(4t-1)(2t+1)}{t^2(1-t)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(t)$ の増減は下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	16	$\nearrow$

よって $f(t)$ は $t = \frac{1}{4}$ のとき最小値 16 をとる。よって線分 QR の長さは $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき最小となり、最小値は 4 である。

(答) 4

(1)

与式に $x=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= -e^0 + f(0) \\ \Leftrightarrow f(0) &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(0)=1$

(2)

与式の両辺を x で微分すると

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = e^{-x} + f'(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、両辺を2乗して整理すると

$$\begin{aligned} 1+(f'(x))^2 &= (e^{-x} + f'(x))^2 \\ \Leftrightarrow 1+(f'(x))^2 &= e^{-2x} + 2e^{-x}f'(x) + (f'(x))^2 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。よって $x=0$ を代入すると

$$f'(0) = \frac{1-1}{2} = 0$$

となる。

(答) $f'(0)=0$

(3)

②式より

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。(1)より $f(0)=1$ であるから、

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1+1}{2} + C &= 1 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

となる。

(答) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4)

①式より

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx &= \int_0^1 x (e^{-x} + f'(x)) dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x f'(x) dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx + \left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 + f(1) - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 + \frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e - e^{-1}}{2} \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 - e^{-1}$